Theoretische Betrachtungen: Entartete Sternmaterie und weiße Zwerge

Matthias Borchardt, Bonn

Sobald im Inneren eines Sterns der Fusionsprozess zum Erliegen kommt, wird der Gravitationsdruck größer als der thermische Druck und der Stern beginnt zu kollabieren. Dieser Schrumpfungsprozess setzt sich solange fort, bis ein quantenmechanischer Effekt, nämlich der Fermi-Druck (Entartungsdruck) der Elektronen den Gravitationsdruck kompensiert und damit den Stern wieder stabilisiert – ein weißer Zwerg, eine Sternenleiche mit außergewöhnlichen Eigenschaften ist entstanden.

Im Folgenden sollen einige physikalische Zusammenhänge bzgl. einer solch entarteten Sternmaterie näherungsweise hergeleitet werden. Auf die Problematik, inwieweit solche Abschätzungen im Spannungsfeld fachlicher Seriosität und didaktischer Reduktion erlaubt sind, soll am Ende dieser Ausarbeitung eingegangen werden.

1. Der Gravitationsdruck

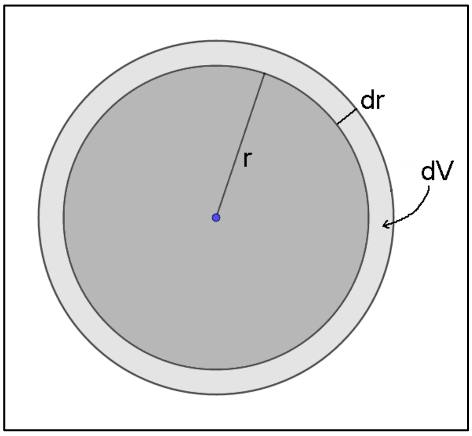
Wie groß ist der Druck im Inneren eines Sterns, der durch die Masse M, den Radius R und einer mittlerer Dichte ρ charakterisiert wird?

Für die mittlere Dichte gilt: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$, also $\rho = \frac{3 \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R^3}$.

Die Masse einer Kugelschale der Dicke *dr* beträgt:

$dm = \rho \cdot dV = 4\pi \cdot \rho \cdot r^2 \cdot dr$,

wobei $dV = 4\pi \cdot r^2 \cdot dr$ verwendet wurde.



Der Druck, den diese Kugelschale auf die darunterliegende Fläche ausübt ist:

$$dP = \frac{F(r)}{A(r)} = \frac{dm \cdot g(r)}{4\pi \cdot r^2} .$$

Die Gravitationsbeschleunigung im Abstand r ist:

$$g(r) = \frac{G \cdot m(r)}{r^2} = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \rho \cdot r .$$

Damit erhalten wir:

$$dP = \frac{F(r)}{A(r)} = \frac{dm \cdot g(r)}{4\pi \cdot r^2} = \frac{4\pi \cdot \rho \cdot r^2 \cdot dr \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \rho \cdot r}{4\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \rho^2 \cdot r \cdot dr$$

Der Gravitationsdruck im Zentrum des Sterns lässt sich nun durch Integration finden:

$P_G = \frac{4}{3}\pi \cdot G \cdot \rho^2 \cdot \int_0^R r \cdot dr = \frac{2}{3}\pi \cdot G \cdot \rho^2 \cdot R^2$ und mit $\rho = \frac{3 \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R^3}$ erhalten wir:

$P_G = \frac{2}{3}\pi \cdot G \cdot R^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R^3}\right)^2 = \frac{3 \cdot G \cdot M^2}{8 \cdot \pi \cdot R^4}$ → Ergebnis: $\boxed{P_G = \frac{3 \cdot G \cdot M^2}{8 \cdot \pi \cdot R^4}}$

2. Der Entartungsdruck (Fermidruck)

Wir ordnen jedem Elektron einen kleinen Raumbereich (Würfel) der Kantenlänge d zu. Dort darf sich jeweils nur ein einzelnes Elektron befinden. Aus der Quantenphysik wissen wir, dass Ort und Impuls des Elektrons in einem solch subatomar kleinen Raum der Heisenbergschen Unschärferelation genügen müssen, also $\Delta p_x \cdot \Delta x \approx \hbar$, bzw. $\Delta p_x = \frac{\hbar}{d}$.

Für den Betrag des Impulses des Elektrons gilt dann: $p_F^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{3 \cdot \hbar^2}{d^2}$

Mithilfe der klassischen Energieformel erhalten wir damit die Energie des Elektrons:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2 \cdot m_e} = \frac{3 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m_e \cdot d^2} \ .$$

Für den Druck, den man benötigt, um das Volumen V um dV zusammenzudrücken, liefert die Thermodynamik die Formel: $P = -\frac{dE}{dV}$. Mit $V = d^3$ ergibt sich: $d = V^{\frac{1}{3}}$.

Damit: $E_F = \frac{3 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m_e \cdot d^2} = \frac{3 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot V^{-\frac{2}{3}}$ und

$$P_F = -\frac{dE}{dV} = -\frac{3 \cdot \hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot V^{-\frac{5}{3}} = \frac{\hbar^2}{m_e} \cdot d^{-5}$$

Also: $P_F = \frac{\hbar^2}{m_e \cdot d^5}$.

Wir überlegen nun, wie viele von diesen Würfelvolumina es insgesamt gibt, also wie viele Elektronen ungefähr im Stern der Masse M enthalten sind. Wenn wir von einer reinen Wasserstoffkugel ausgehen, entspricht die Zahl der Elektronen der Anzahl der Protonen. Daher muss gelten:

$$V_{Stern} = \frac{M}{m_p} \cdot d^3 \quad \rightarrow \quad \tfrac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{M}{m_p} \cdot d^3 \iff d = \left(\tfrac{4}{3}\pi\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{m_p}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot R \ .$$

Leicht gerundet ergibt das: $d \approx 1{,}5 \cdot \left(\frac{m_p}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot R$.

Dies setzen wir oben ein und erhalten eine Abschätzung für den Entartungsdruck P_F:

$$P_F = \frac{\hbar^2}{m_e \cdot d^5} = \frac{\hbar^2 \cdot M^{\frac{5}{3}}}{m_e \cdot (1{,}5)^5 \cdot m_p^{\frac{5}{3}} \cdot R^5} \approx \frac{\hbar^2 \cdot M^{\frac{5}{3}}}{7{,}6 \cdot m_e \cdot m_p^{\frac{5}{3}} \cdot R^5}$$

Ergebnis: $\boxed{P_F = \frac{\hbar^2 \cdot M^{\frac{5}{3}}}{7{,}6 \cdot m_e \cdot m_p^{\frac{5}{3}} \cdot R^5}}$

3. Gleichgewicht – nichtrelativistische Elektronen

Der Stern stabilisiert sich, wenn der Gravitationsdruck durch den Fermi-Druck kompensiert

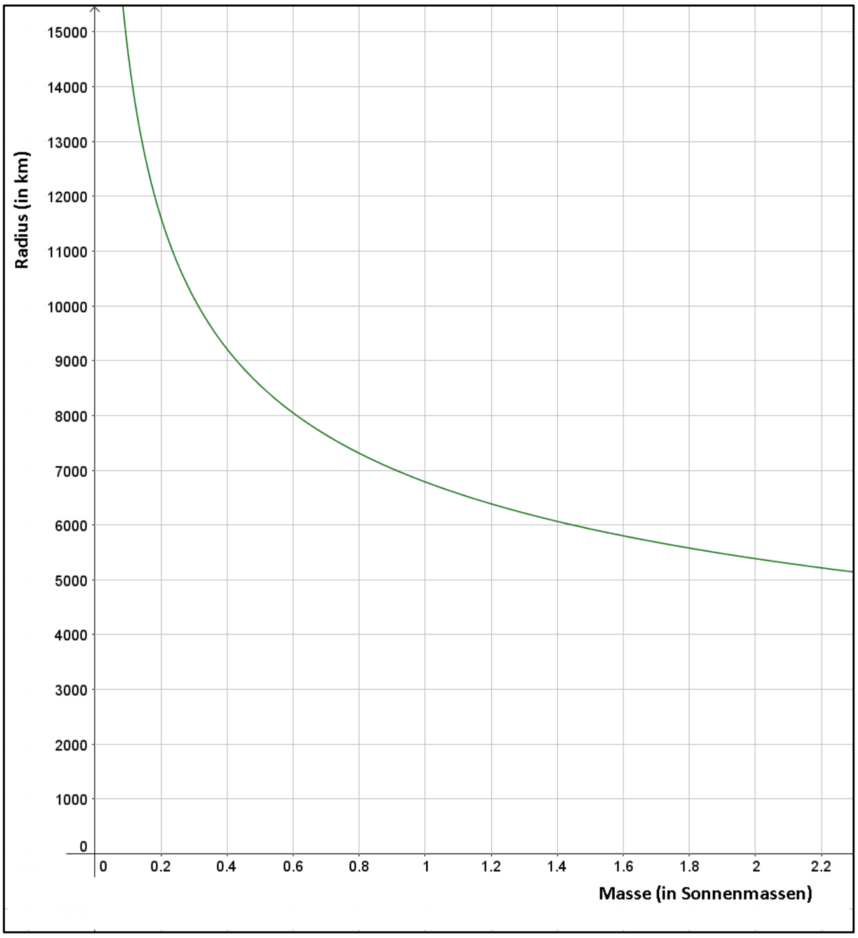
wird: $$\frac{3\cdot G\cdot M^2}{8\cdot\pi\cdot R^4} = \frac{\hbar^2\cdot M^{\frac{5}{3}}}{7{,}6\cdot m_e\cdot m_p^{\frac{5}{3}}\cdot R^5} \Leftrightarrow M^{\frac{1}{3}}\cdot R = \frac{8\pi\cdot\hbar^2}{3\cdot 7{,}6\cdot G\cdot m_e\cdot m_p^{\frac{5}{3}}}$$

und schließlich:

$$M^{\frac{1}{3}}\cdot R = \frac{1{,}1\cdot\hbar^2}{G\cdot m_e\cdot m_p^{\frac{5}{3}}}$$ also: $$\boxed{M^{\frac{1}{3}}\cdot R = \text{const}}$$ mit $\text{const} = 8{,}55\cdot 10^{16}\ \text{m}\,\text{kg}^{\frac{1}{3}}$

oder $$\left(\frac{M}{M_{\text{Sonne}}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot R = 6\,786\ \text{km}\ .$$

Es ergibt sich das bemerkenswerte Ergebnis, dass der Durchmesser des Sterns mit zunehmender Masse kleiner wird. Das untere Diagramm zeigt dieses Ergebnis, das für nichtrelativistische Elektronen hergeleitet wurde. Für eine Masse, die genau einer Sonnenmasse entspricht (Sirius B), ergibt sich beispielsweise ein Radius von 6786 km.



4. Gleichgewicht – relativistische Elektronen führen zur Chandrasekhar-Grenze

Wird das Zellenvolumen der einzelnen Elektronen immer weiter komprimiert, steigt aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation der Impuls der Elektronen stetig an. Irgendwann erreichen sie Geschwindigkeiten, die im Bereich der Lichtgeschwindigkeit liegen. Dann gilt für die Energie eines Elektrons: $E = p \cdot c$ und wegen

$p_F^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{3 \cdot \hbar^2}{d^2} \quad \rightarrow \quad p_F = \sqrt{3} \cdot \frac{\hbar}{d}$ ergibt sich die Energie:

$$E_F = \frac{\sqrt{3} \cdot \hbar \cdot c}{d} .$$

Für den Druck, den man benötigt, um das Volumen V um dV zusammenzudrücken, liefert die Thermodynamik die Formel: $P = -\frac{dE}{dV}$. Mit $V = d^3$ ergibt sich: $d = V^{\frac{1}{3}}$ und damit:

$E_F = \sqrt{3} \cdot \hbar \cdot c \cdot V^{-\frac{1}{3}}$ und $P = -\frac{dE}{dV} = -\sqrt{3} \cdot \hbar \cdot c \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) V^{-\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \hbar \cdot c}{3 \cdot d^4}$.

Nun setzen wir die bereits bekannte Formel (s.o.) ein: $d = 1{,}5 \cdot \left(\frac{m_p}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot R$ und erhalten:

$$P_F = \frac{\sqrt{3} \cdot \hbar \cdot c}{3 \cdot d^4} = \frac{\sqrt{3} \cdot \hbar \cdot c \cdot M^{\frac{4}{3}}}{3 \cdot (1{,}5)^4 \cdot m_p^{\frac{4}{3}} \cdot R^4} = \frac{0{,}114 \cdot \hbar \cdot c \cdot M^{\frac{4}{3}}}{m_p^{\frac{4}{3}} \cdot R^4}$$

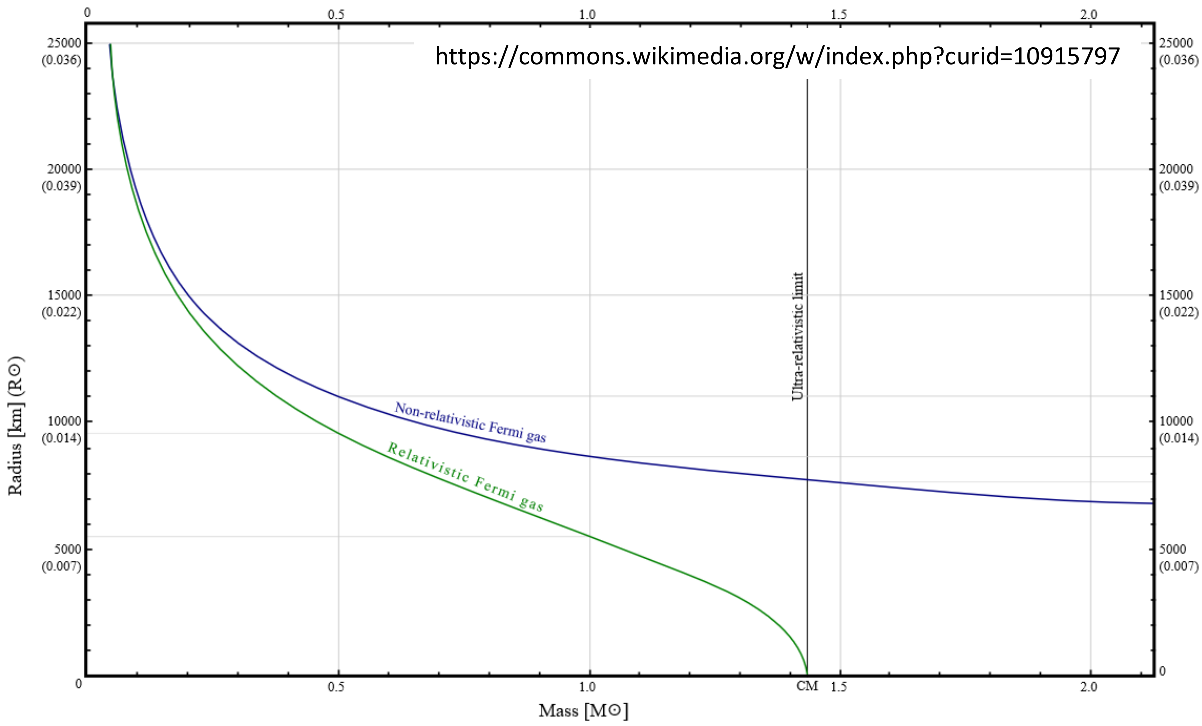
Gleichsetzen mit dem Gravitationsdruck ergibt:

$$\frac{3 \cdot G \cdot M^2}{8 \cdot \pi \cdot R^4} = \frac{0{,}114 \cdot \hbar \cdot c \cdot M^{\frac{4}{3}}}{m_p^{\frac{4}{3}} \cdot R^4} \quad \Leftrightarrow \quad M^{\frac{2}{3}} = 0{,}955 \cdot \frac{\hbar \cdot c}{G \cdot m_p^{\frac{4}{3}}}$$

$$M_C = \frac{0{,}933}{m_p^2} \cdot \left(\frac{\hbar \cdot c}{G}\right)^{\frac{3}{2}} = 3{,}44 \cdot 10^{30}\,\text{kg} = 1{,}72 \cdot M_{Sonne}$$

Diese Masse M_C erzeugt einen solch hohen Druck im Sterninneren, dass die Elektronen relativistische Geschwindigkeiten annehmen. Eine weitere Druckerhöhung führt zum erneuten Kollaps des Sterns – ein Vorgang, der ungebremst weitergeht, bis die Nukleonen selbst ihren Entartungsdruck aufbauen, der den Stern dann erst bei extrem kleinen Radien (10 bis 20 Km) stabilisiert – ein Neutronenstern ist entstanden.

Die obere Herleitung ergab für die Grenzmasse, ab der ein weißer Zwerg nicht mehr stabil ist und in sich zusammenbricht, einen Wert von etwa 1,72 Sonnenmassen.
Eine exakte Rechnung, welche die Fermi-Dirac-Statistik eines entarteten Elektronengases verwendet, ergibt einen Wert von 1,46 Sonnenmassen.
Dies ist die sogenannte **Chandrasekhar-Grenze** für weiße Zwerge.



<u>Anmerkungen:</u>

Die obere Herleitungen der Radius-Masse-Beziehung und der Grenzmasse weißer Zwerge liefern in etwa die richtigen quantitativen Ergebnisse. Allerdings wurden einige Ansätze und Annahmen so gewählt, dass die angestrebten Resultate am Ende größenordnungsmäßig herauskommen. So wurde beispielsweise angenommen, dass der Stern aus reinem Wasserstoff besteht. In der Regel besteht ein weißer Zwerg zu großen Teilen aber aus Sauerstoff und Kohlenstoff. Die Kerne dieser Elemente enthalten 6 Protonen und 6 Neutronen sowie 8 Protonen und 8 Neutronen. Auf je zwei Nukleonen kommt also stets ein Elektron. Wenn die Zahl der Elektronen aber nur halb so groß ist, wie in der oberen Rechnung veranschlagt, ergeben sich doppelt so große Zellenvolumina und da deren Kantenlängen mit d^5 bzw. d^4 in die Rechnungen eingehen, ergeben sich bereits deutlich andere Endergebnisse. Auch die Annahme einer homogenen Dichte im Sterninneren ist eine Vereinfachung, die sich auf die quantitativen Resultate auswirkt.

Als Lehrender ist man da in einem gewissen Dilemma, denn die physikalisch exakteren Ansätze kommen wohl kaum ohne Begrifflichkeiten wie Phasenraum und Fermi-Statistik aus, was diesen Weg in der Schule dann eher auf recht leistungsstarke Lerngruppen beschränkt. Die Näherungsverfahren hingegen liefern nur dann akzeptable Ergebnisse, wenn man an bestimmten Stellen Annahmen und Abschätzungen einbringt, die physikalisch nicht immer gut begründbar erscheinen.

Sollte man sich also als Lehrender für eine vereinfachte Version der Herleitungen entscheiden, so wie in dem oberen Beispiel vorgestellt, erscheint es dringend geboten, die Schülerinnen und Schüler deutlich auf die Problematik dieser Abschätzungen und Hilfsargumnete hinzuweisen.

Matthias Borchardt,
Bonn, Dezember 2018