

## Formeln für das relativistische Zyklotron

(Computersimulation zum Synchro-Zyklotron: [www.mabo-physik.de/zyklotron.html](http://www.mabo-physik.de/zyklotron.html))

---

1. Für den (relativistischen) **Impuls p** ergibt sich:

Ansatz:  $F_{\text{Rad}} = F_L$  (Die Lorentzkraft wirkt als kreisbildende Kraft)

$$\frac{m_v \cdot v^2}{r} = q \cdot v \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad m_v \cdot v = q r B$$

Also:  $\mathbf{p} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$

Dabei ist r der Radius der (halb)kreisförmigen Teilchenbahn im Zyklotron.

---

2. Für das Geschwindigkeitsverhältnis  $\beta = \frac{v}{c}$  ergibt sich:

$$\frac{E_0}{E_{\text{ges}}} = \frac{E_0}{\frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \sqrt{1-\beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1-\beta^2 = \left( \frac{E_0}{E_{\text{ges}}} \right)^2$$

Daraus folgt:  $\beta = \sqrt{1 - \left( \frac{E_0}{E_{\text{ges}}} \right)^2}$

- a) Mit der kinetischen Energie:

Wegen  $E_{\text{ges}} = E_0 + E_{\text{kin}}$  gilt:  $\beta = \sqrt{1 - \left( \frac{E_0}{E_0 + E_{\text{kin}}} \right)^2}$

Beim Zyklotron gilt: Die kinetische Energie der Teilchen ergibt sich aus der Beschleunigungsarbeit, die das elektrische Feld am Teilchen verrichtet. Wenn das Teilchen den Beschleunigungsspalt k-mal durchlaufen hat, gilt daher:

$E_{\text{kin}} = k \cdot q \cdot U$ , wobei U die Spannung ist, die an den D-förmigen Elektroden anliegt.

Die Geschwindigkeit des Teilchens in Bezug zur Lichtgeschwindigkeit ergibt sich

daher zu:  $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left( \frac{E_0}{E_0 + k \cdot q \cdot U} \right)^2}$ .

### Beispiel:

B = 2T, U=800kV, Protonen ( $E_0 = 938,27 \text{ MeV}$ ), k=54,5 Spaltdurchgänge (Computersimulation):

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left( \frac{938,27 \cdot 10^6}{938,27 \cdot 10^6 + 54,5 \cdot 1 \cdot 800 \cdot 10^3} \right)^2} = 0,2946.$$

Die Computersimulation ergibt als numerisch ermitteltes Ergebnis für die Endgeschwindigkeit:  $v/c = 0,2926$ .

b) Mit dem Impuls  $p$ :

Wegen  $E_{\text{ges}}^2 = E_0^2 + p^2 c^2$  ergibt sich aus  $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_{\text{ges}}}\right)^2}$ :

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E_0^2 + (p \cdot c)^2}} = \sqrt{\frac{E_0^2 + (p \cdot c)^2 - E_0^2}{E_0^2 + (p \cdot c)^2}} = \sqrt{\frac{(p \cdot c)^2}{E_0^2 + (p \cdot c)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{E_0^2 + (p \cdot c)^2}{(p \cdot c)^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{E_0}{p \cdot c}\right)^2}}\end{aligned}$$

Beim Zyklotron gilt für den Impuls:  $p = q \cdot r \cdot B$ , sodass sich ergibt:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{E_0}{q r B c}\right)^2}}$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen wird also bei festgelegtem Radius des Zyklotrons allein durch die Stärke des Magnetfeldes  $B$  bestimmt.

Beispiel:

$B = 2\text{T}$ ,  $U = 800\text{kV}$ , Protonen ( $E_0 = 938,27\text{ MeV}$ ), Endradius der Bahn  $r = 0,479\text{m}$  (Computersimulation):

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{938,27 \cdot 10^6}{1 \cdot 0,479 \cdot 2 \cdot c}\right)^2}} = 0,2927.$$

Die Computersimulation ergibt als numerisch ermitteltes Ergebnis für die Endgeschwindigkeit:  $v/c = 0,2926$ .

3. Die **kinetische Energie** der Teilchen:

Allgemein gilt:  $E_{\text{ges}} = E_0 + E_{\text{kin}} \Leftrightarrow E_{\text{kin}} = E_{\text{ges}} - E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - E_0$

Daraus ergibt sich:  $E_{\text{kin}} = E_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right)$

Für das Zyklotron wählen wir den Ansatz:

$$E_{\text{ges}}^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \Rightarrow (E_0 + E_{\text{kin}})^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

Daraus ergibt sich:  $E_0 + E_{\text{kin}} = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} \Leftrightarrow E_{\text{kin}} = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - E_0.$

Mit  $p = q \cdot r \cdot B$  ergibt das:

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{E_0^2 + (q r B c)^2} - E_0$$

Die kinetische Energie der Teilchen, die das Zyklotron verlassen, hängt also entscheidend vom Durchmesser des Zyklotrons und der Stärke des Magnetfeldes ab.

Beispiel:

$B = 2\text{T}$ ,  $U = 800\text{kV}$ , Protonen ( $E_0 = 938,27\text{ MeV}$ ), Endradius der Bahn  $r = 0,479\text{m}$  (Computersimulation):

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{(938,27 \cdot 10^6)^2 + (1 \cdot 0,479 \cdot 2 \cdot c)^2} \text{ eV} - 938,27 \cdot 10^6 \text{ eV} = 42,97 \text{ MeV}$$

Die Computersimulation ergibt als numerisch ermitteltes Ergebnis für die kinetische Endenergie  $E_{\text{kin}} = 42,95\text{ MeV}$ .

#### 4. Radius des Zyklotrons

$E_{\text{ges}}^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \Rightarrow (E_0 + E_{\text{kin}})^2 = E_0^2 + p^2 c^2$  und mit  $p = q \cdot r \cdot B$  ergibt das:

$$(E_0 + E_{\text{kin}})^2 = E_0^2 + (q B c)^2 \cdot r^2.$$

Umgeformt nach  $r$ :

$$r^2 = \frac{(E_0 + E_{\text{kin}})^2 - E_0^2}{(q B c)^2}$$

$$r = \frac{\sqrt{(E_0 + E_{\text{kin}})^2 - E_0^2}}{q B c}.$$

Die Formel eignet sich, wenn man berechnen möchte, welchen Durchmesser ein Zyklotron haben müsste, um eine bestimmte kin. **Endenergie** bei vorgegeben Magnetfeld zu erzeugen.

Beispiel:

$B = 2\text{T}$ , Protonen ( $E_0 = 938,27\text{ MeV}$ ).

Welchen Durchmesser müsste das Zyklotron aufweisen, um Protonen mit einer Endenergie von  $500\text{ MeV}$  zu erzeugen?

$$r = \frac{\sqrt{(938,27 \cdot 10^6 + 500 \cdot 10^6)^2 - (938,27 \cdot 10^6)^2}}{1 \cdot 2 \cdot 2,99792458 \cdot 10^8} \text{ m} = 1,818 \text{ m}.$$

Der Durchmesser des Zyklotrons sollte also etwa  $D = 3,64\text{ m}$  betragen.

## 5. Beschleunigung und Kraft in der SRT

Es gilt der Zusammenhang:

$$F = \frac{m_0 \cdot a}{\left(\sqrt{1 - \beta^2}\right)^3}, \quad \text{also} \quad a = \frac{F}{m_0} \cdot \left(\sqrt{1 - \beta^2}\right)^3$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} F(t) = \dot{p}(t) &= \frac{d}{dt}(m_v \cdot v) = \frac{dm_v}{dt} \cdot v + m_v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dm_v}{dt} \cdot v + m_v \cdot a \\ &= \left( \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot v + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot a \\ &= \left( \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot m_0 \cdot v + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot a \\ &= \left( \left( \frac{-2v \cdot \frac{dv}{dt}}{c^2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right) \cdot m_0 \cdot v + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot a \\ &= \left( \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right) \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot m_0 \cdot a + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot a \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot m_0 \cdot a + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} m_0 \cdot a \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot m_0 \cdot a \cdot \left( \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \cdot \frac{v^2}{c^2} + 1 \right) \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot m_0 \cdot a \cdot \left( \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot m_0 \cdot a \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left( \frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right) = \frac{m_0 a}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3} \end{aligned}$$