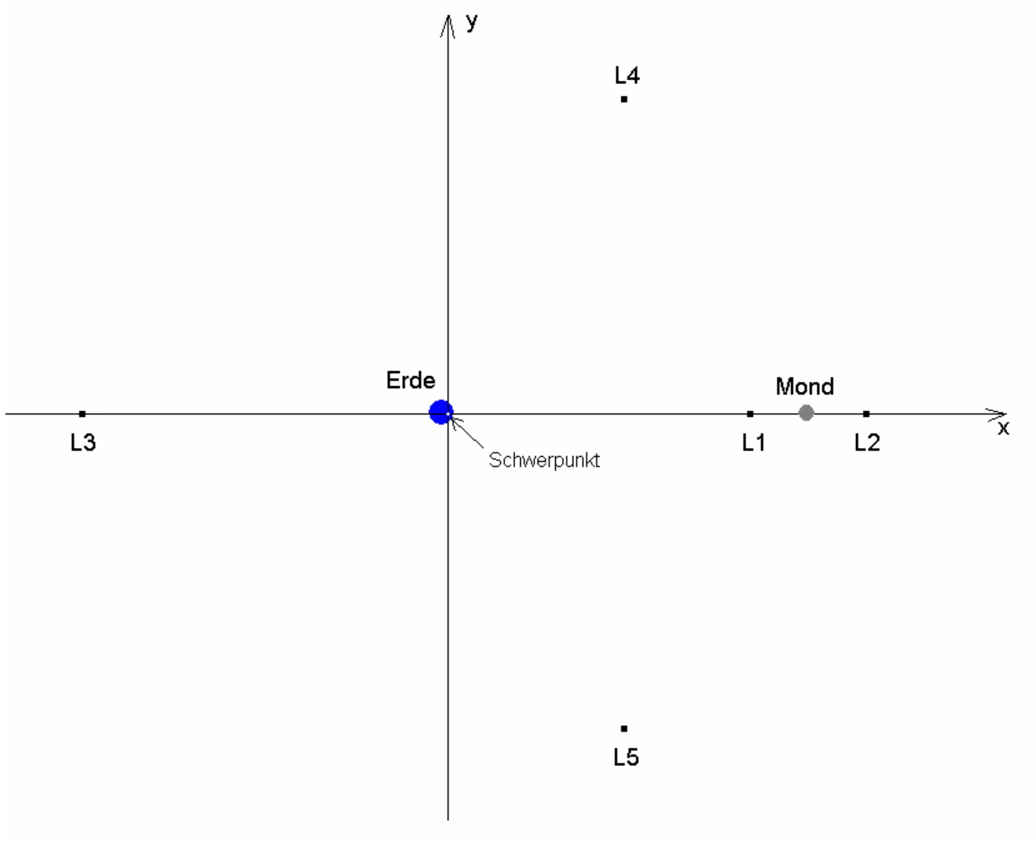
Die Lagrangepunkte im System Erde-Mond

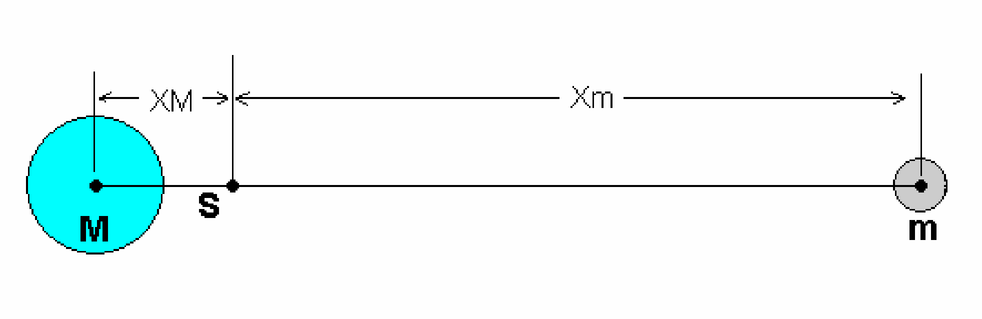
Matthias Borchardt
Tannenbusch-Gymnasium Bonn
borchardt.matthias@t-online.de

Einleitung:

Welche Kräfte spürt eine Raumsonde, die sich antriebslos in der Nähe von Erde und Mond aufhält?
Zunächst sind da die Anziehungskräfte der beiden Himmelskörper, die dem Gravitationsgesetz folgend mehr oder weniger stark auf die Sonde einwirken.
Dazu kommt eine dritte Kraft, die man jedoch erst dann realisiert, wenn man das System der Massen nicht statisch versteht, sondern die Dynamik der Rotation von Erde und Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt berücksichtigt. Durch diese Bewegung entsteht nämlich eine Zentrifugalkraft - eine vom Schwerpunkt weg gerichtete Kraft.
An fünf Stellen im Raum addieren sich diese drei Kräfte zu Null – das sind die fünf Lagrangepunkte L1, L2, L3, L4 und L5. Sie werden auch „Parkplätze" des Erde-Mond-Systems genannt, weil eine Raumsonde, die man genau an diesen Stellen positioniert, bezüglich der beiden Himmelskörper ortsfest bleibt.
Kleine Abweichungen von diesen besonderen Punkten führen bereits zu einem komplizierten Verhalten: Bei L1, L2 und L3 zeigt sich, dass die Raumsonde wegdriftet - anfangs jedoch mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit, sodass es möglich sein sollte, die Position durch minimale Kurskorrekturen für längere Zeiten zu halten.
Anders verhält sich eine Sonde in der Nähe von L4 und L5 - sie umkreist diese Punkte auf verschlungenen Bahnen - eine Kurskorrektur ist nicht unbedingt erforderlich, denn die Kurven bleiben stets in der Nähe der Lagrangepunkte.



Der Schwerpunkt:



Erde und Mond rotieren um einen gemeinsamen Schwerpunkt, dessen Lage sich wie folgt berechnen lässt:

$$M \cdot x_M = m \cdot x_m$$

mit $r = x_M + x_m$ ergibt sich

$M \cdot x_M = m \cdot (r - x_M)$ oder $M \cdot (r - x_m) = m \cdot x_m$

$M \cdot x_M = m \cdot r - m \cdot x_M$ $\qquad$ $M \cdot r - M \cdot x_m = m \cdot x_m$

$(M + m) \cdot x_M = m \cdot r$ $\qquad$ $M \cdot r = (m + M) \cdot x_m$

$$\boxed{x_M = \frac{m}{M+m} \cdot r} \qquad \boxed{x_m = \frac{M}{M+m} \cdot r}$$

Mit $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$, $m = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg$ und r = 384 400 km (mittlerer Abstand Erde Mond) ergibt sich x_M = 4675 km.
Das bedeutet, dass der Schwerpunkt **S** noch innerhalb der Erdkugel liegt.

Der Übersicht wegen werden wir **S** jedoch stets außerhalb zeichnen.

Die Zentrifugalkraft:

Wir betrachten die Zentrifugalbeschleunigung: $a_Z = \omega^2 \cdot x$, wobei x die Entfernung vom Schwerpunkt **S** ist.

Für die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation gilt: $\omega = \sqrt{\dfrac{G \cdot (M+m)}{r^3}}$

(r - Abstand M, m)

Diese Formel soll hergeleitet werden:

Die Gravitationskraft wirkt als Radialkraft

Bewegung der Erde um S

$$F_{Z_M} = F_G$$

$$M \cdot \omega^2 \cdot x_M = G \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$\omega^2 = G \frac{m}{r^2 \cdot x_M}$$

mit $x_M = \dfrac{m}{M+m} \cdot r$ ergibt sich

$$\omega^2 = G \frac{m}{r^2} \cdot \frac{(M+m)}{m \cdot r}$$

$$\omega^2 = \frac{G \cdot (M+m)}{r^3}$$

Bewegung des Mondes um S

$$F_{Z_m} = F_G$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot x_m = G \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$\omega^2 = G \frac{M}{r^2 \cdot x_m}$$

mit $x_m = \dfrac{M}{M+m} \cdot r$ ergibt sich

$$\omega^2 = G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{(M+m)}{M \cdot r}$$

$$\omega^2 = \frac{G \cdot (M+m)}{r^3}$$

gleich

Natürlich muss sich für die Winkelgeschwindigkeit der Erde der gleiche Wert ergeben, wie für die des Mondes.
Anders formuliert: Beide Himmelskörper benötigen die gleiche Zeit, um den gemeinsamen Schwerpunkt zu umkreisen.

Für die Umlaufdauer ergibt sich:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{G \cdot (m+M)}{r^3}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot (7{,}35 \cdot 10^{22} + 5{,}97 \cdot 10^{24})}{384400000^3}}}\ s$$

= 2 358 034,263 s
= 27, 3 Tage. Das ist der siderische Monat

Die Gravitationskräfte:

Die Gravitationsbeschleunigungen ergeben sich wie folgt:

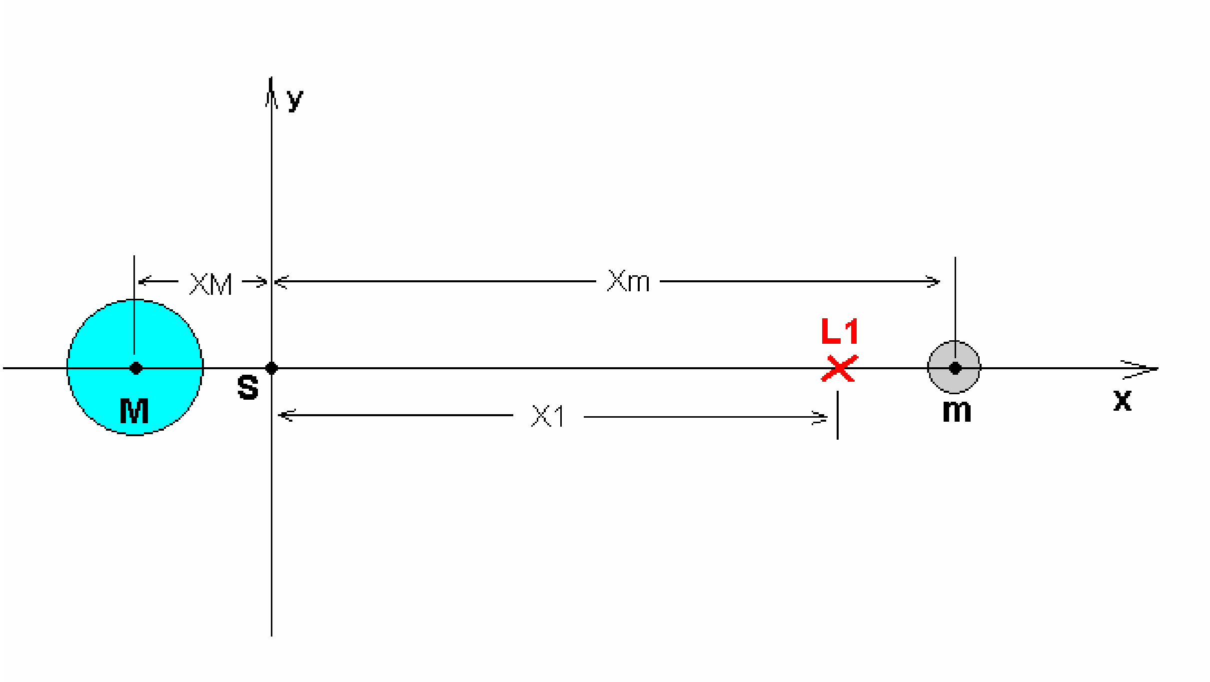
Die Erde übt auf einen Körper die Beschleunigung $a_{G1} = \frac{G \cdot M}{x^2}$ aus.

Der Mond übt auf einen Körper die Beschleunigung $a_{G2} = \frac{G \cdot m}{x^2}$ aus.

Dabei ist x der Abstand zum jeweiligen Massenzentrum.

Der Lagrangepunkt L1:

Der Ursprung unseres Koordinatensystems soll stets im Schwerpunkt S liegen:



Die drei Beschleunigungen ergeben sich mit Hilfe der Skizze: (es gilt: $r = x_M + x_m$)

$$a_{G1} = \frac{G \cdot M}{(x_M + x_1)^2}$$

$$a_{G2} = \frac{G \cdot m}{(r - x_M - x_1)^2}$$

$$a_Z = \omega^2 \cdot x_1$$

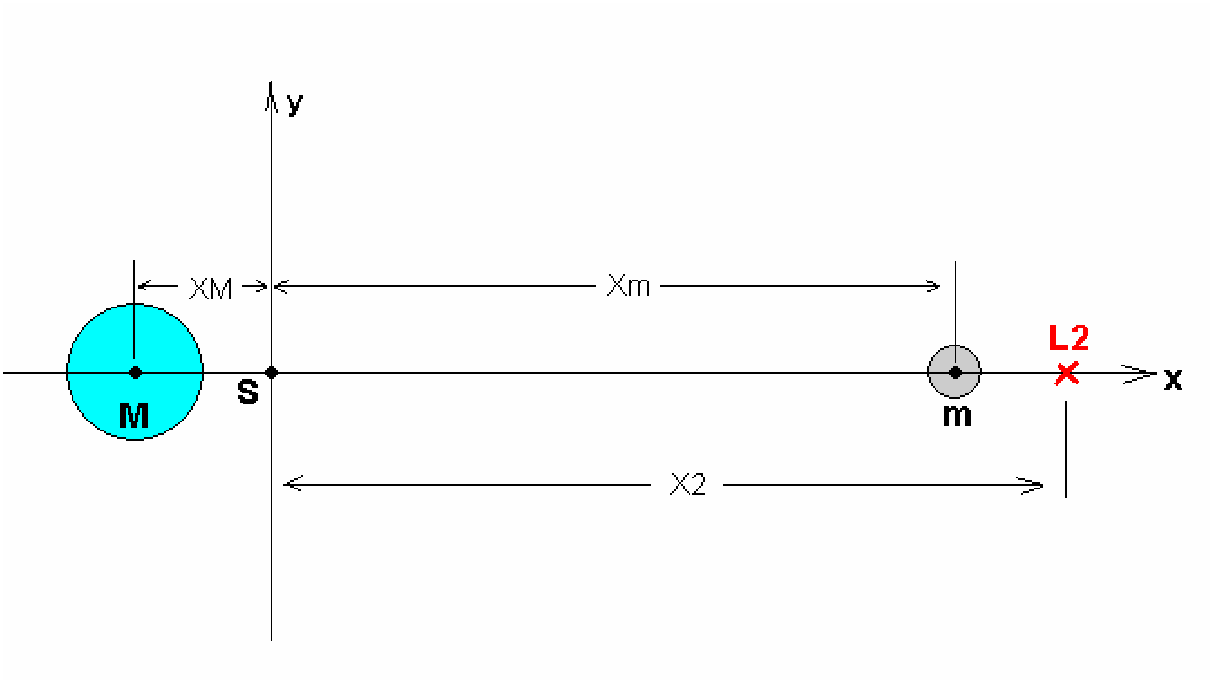
Beim Lagrangepunkt L1 sollen sich die Beschleunigungen zu Null addieren.
Dort gilt also $a_{G1} = a_{G2} + a_Z$.

(Anders formuliert: Die Gravitation der Erde hebt in L1 die Gravitation des Mondes und die Zentrifugalkraft auf.)

Die Gleichung $\frac{G \cdot M}{(x_M + x_1)^2} = \frac{G \cdot m}{(r - x_M - x_1)^2} + \omega^2 \cdot x_1$ müsste nun nach x1 aufgelöst werden, wollte man die Position des Langrangepunktes berechnen.
Dies ist mathematisch sehr aufwendig. Daher soll ein einfacherer Weg eingeschlagen werden, L1 zu bestimmen, nämlich mit Hilfe eines **Tabellenkalkulationsprogramms**.
Man berechnet mit Hilfe einer solchen Software längs der x-Achse für wachsende x1-Werte (z.B. in 100 Meter Abständen) jeweils die Beschleunigung a_{G1} sowie die Summe $a_{G2} + a_Z$. Der Lagrangepunkt L1 liegt bei dem x1-Wert, bei dem in etwa gilt
$a_{G1} = a_{G2} + a_Z$.
Dieses Verfahren mit Hilfe einer Tabellenkalkulation liefert für L1 das Ergebnis:

x1 = 321.688,900 m, also etwa **x1 = 321.689 km**.

<u>Der Lagrangepunkt L2:</u>



Die drei Beschleunigungen ergeben sich mit Hilfe der Skizze: (es gilt: $r = x_M + x_m$)

$$a_{G1} = \frac{G \cdot M}{(x_M + x_2)^2}$$

$$a_{G2} = \frac{G \cdot m}{(x_2 - (r - x_M))^2}$$

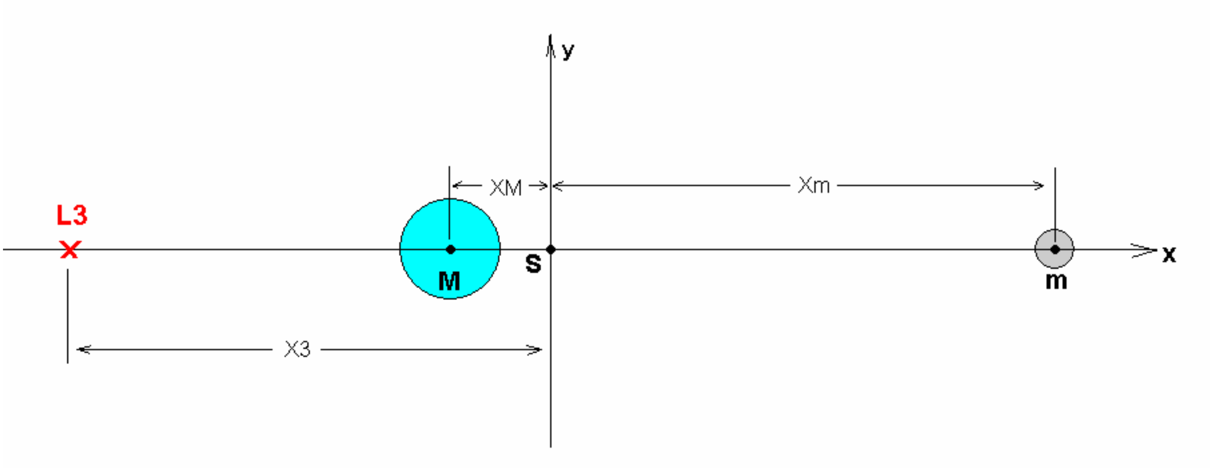
$$a_Z = \omega^2 \cdot x_2$$

Beim Lagrangepunkt L2 sollen sich die Beschleunigungen zu Null addieren.
Dort gilt also $a_{G1} + a_{G2} = a_Z$.
(Anders formuliert: Die Gravitationskräfte von Erde und Mond heben in L2 die Zentrifugal-kraft auf.)

Das Verfahren der Tabellenkalkulation liefert für L2 das Ergebnis:

x2 = 444.260.800 m also etwa **x2 = 444.261 km**.

Der Lagrangepunkt L3:



Die drei Beschleunigungen ergeben sich: (es gilt: $r = x_M + x_m$)

$$a_{G1} = \frac{G \cdot M}{(x_3 - x_M)^2}$$

$$a_{G2} = \frac{G \cdot m}{(r + x_3 - x_M)^2}$$

$$a_Z = \omega^2 \cdot x_3$$

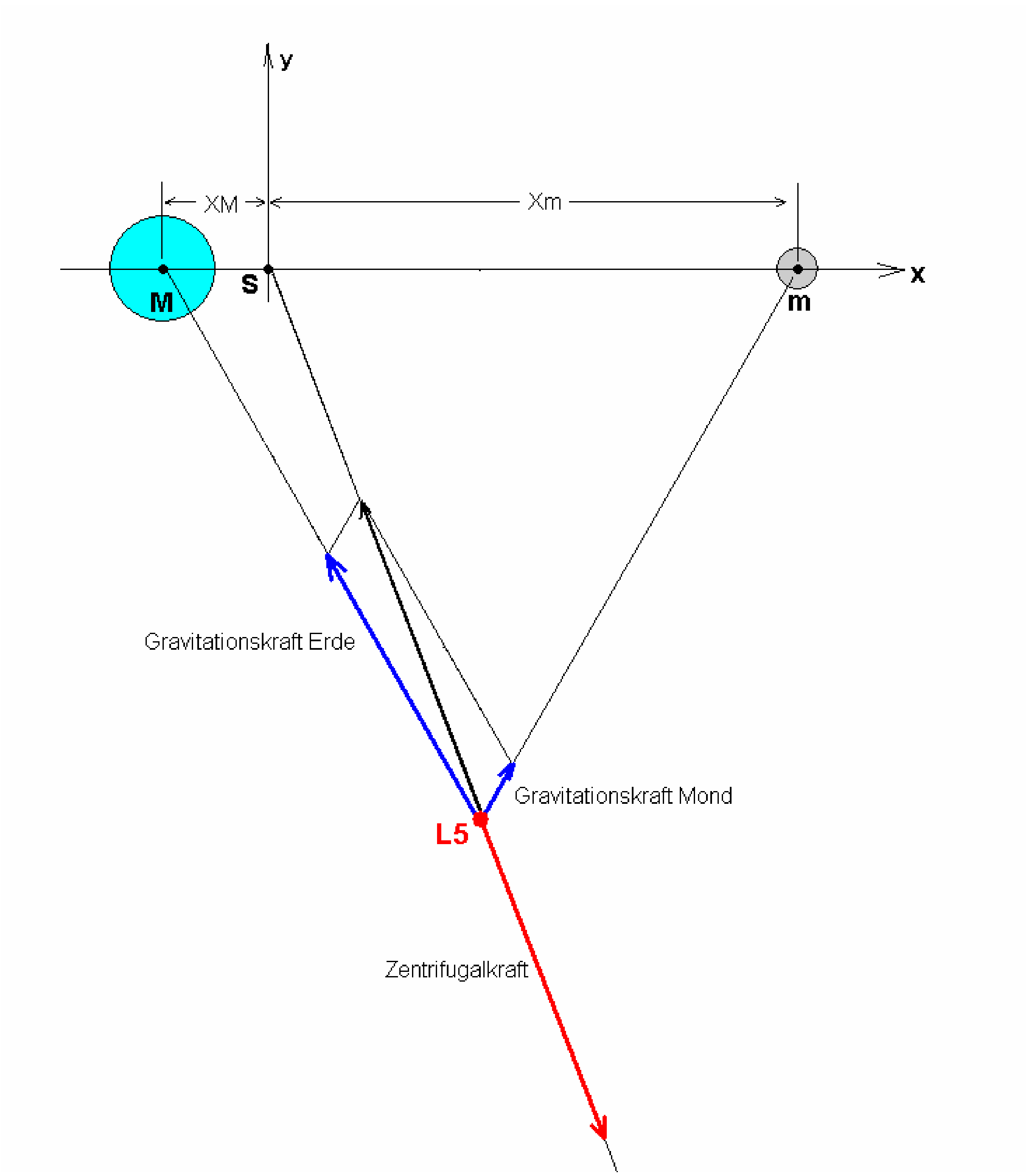
Beim Lagrangepunkt L3 sollen sich die Beschleunigungen zu Null addieren.
Dort gilt also $a_{G1} + a_{G2} = a_Z$.
(Anders formuliert: Die Gravitationskräfte von Erde und Mond heben in L3 die Zentrifugal-kraft auf.)

Das Verfahren mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms liefert für L3 das Ergebnis:

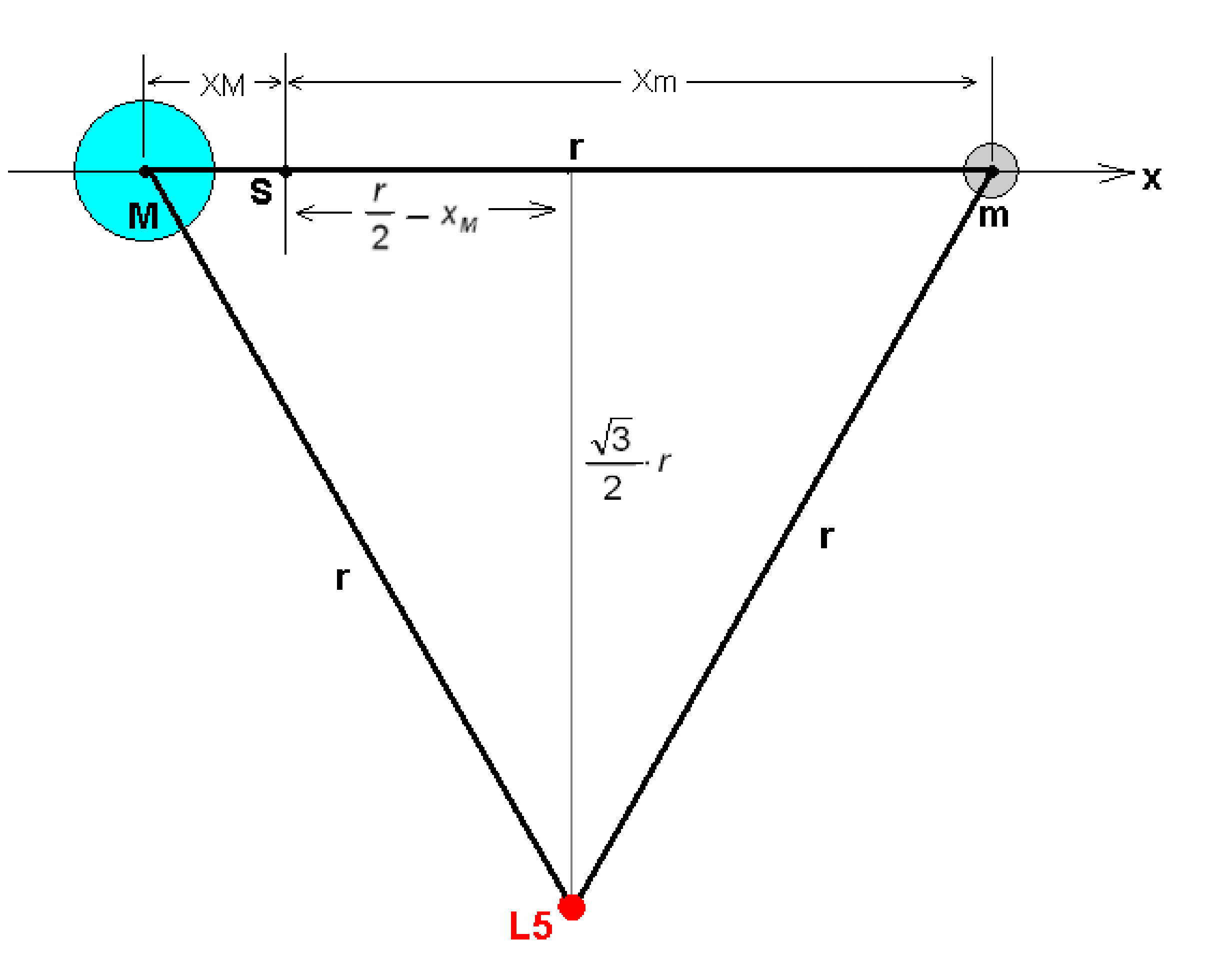
x3 = -386.347.900 m also etwa **x3 = -386.348 km**

Die Lagrangepunkte L4 und L5:

Bei den Lagrangepunkten L4 und L5 sind die Verhältnisse etwas komplizierter, denn die Kräfte sind dort nicht mehr parallel bzw. antiparallel, sondern müssen nach den Regeln der Vektoraddition zusammengesetzt werden.



Bei diesen Lagrangepunkten addieren sich die beiden Gravitationskräfte zu einer Resultierenden, die vom Betrag genau der Zentrifugalkraft entspricht, aber dieser entgegen gerichtet ist. (Vom außen stehenden Beobachter aus betrachtet müsste man sagen: die beiden Gravitationskräfte erzeugen zusammen die Radialkraft, die eine Kreisbahn mit der Umlaufdauer T=27,3 Tage um **S** erzeugt.)
Eine komplizierte mathematische Analyse ergibt für die Lage der Punkte L4 und L5 ein überraschendes Ergebnis: Die Massenzentren von **M** und **m** und der Lagrangepunkt **L5** bilden ein **gleichseitiges Dreieck** mit der Kantenlänge r.



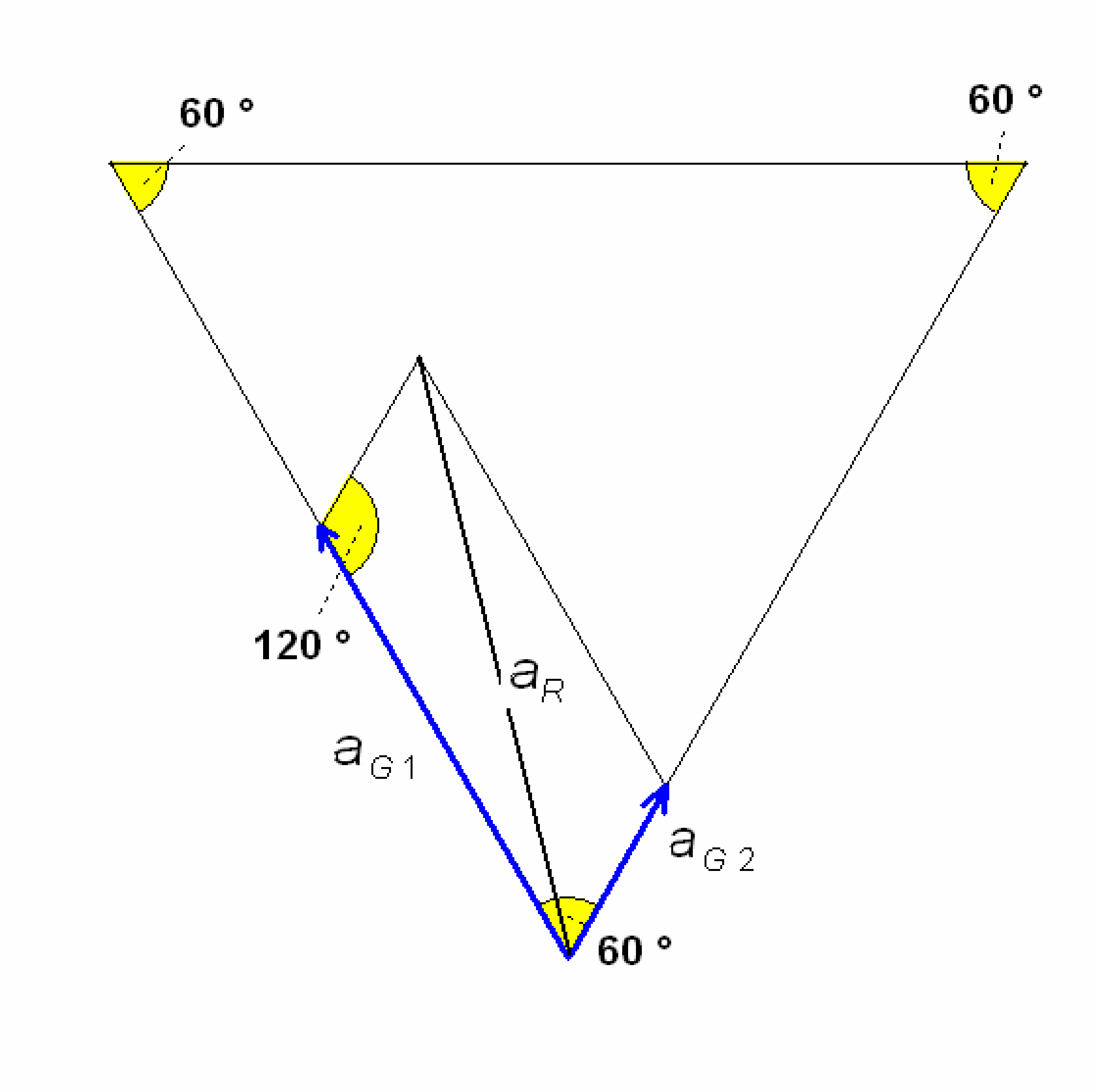
Die Koordinaten des Lagrangepunkt L5 ergeben sich daher durch einfache geometrische Betrachtungen (z.B. ist $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r$ die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge r):

$$L5 = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} - x_M \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 187.525 \ km \\ -332.900 \ km \end{pmatrix}$$

und entsprechend für L4

$$L4 = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} - x_M \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 187.525 \ km \\ 332.900 \ km \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun **nachweisen**, dass sich die drei Kräfte (Beschleunigungen) in L5 tatsächlich zu Null addieren, wenn man L5 als Ecke des beschriebenen gleichseitigen Dreiecks wählt.



Der Kosinussatz liefert: $a_R = \sqrt{a_{G1}^2 + a_{G2}^2 - 2 \cdot a_{G1} \cdot a_{G2} \cdot \cos(120^o)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{G \cdot M}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{G \cdot m}{r^2}\right)^2 - 2\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \frac{G \cdot m}{r^2} \cdot \cos(120)}$$

$$= \frac{G}{r^2} \cdot \sqrt{M^2 + m^2 + M \cdot m} \qquad (\text{ mit } \cos(120) = -\tfrac{1}{2})$$

$$= 0{,}0027128 \, \tfrac{m}{s^2}$$

Nun soll die Zentrifugalbeschleunigung a_Z berechnet werden:

$a_Z = \omega^2 \cdot d$, wobei d der Abstand von L5 zum Schwerpunkt ist. Diese Entfernung lässt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnen, denn die Koordinaten von L5 bezüglich des Schwerpunktes sind ja bekannt:

$$d = \sqrt{(187525000)^2 + (332900000)^2}\ m \quad = 382.083.807{,}1\ m$$

Damit und mit $\omega^2 = \dfrac{G \cdot (m+M)}{r^3}$ ergibt sich:

$$a_Z = \omega^2 \cdot d = \frac{G \cdot (m+M)}{r^3} \cdot d$$

$$= 0{,}0027128\ \tfrac{m}{s^2}$$

Das ist der gleiche Wert, wie die Resultierende aus a_{G1} und a_{G2}.

Damit ist gezeigt, dass sich die drei Kräfte in L5 tatsächlich auslöschen.

Bewegungen einer Raumsonde in der Nähe der Lagrangepunkte:

Wie verhält sich eine Raumsonde, die man in die Nähe eines Lagrangepunktes positioniert? Die Analyse der Bewegungen können wir mathematisch nicht durchführen, da sie ausgesprochen komplex ist.
Aber mit dem Simulationsprogramm „lagrange.exe“ lassen sich wichtige Eigenschaften der Lagrangepunkte recht einfach untersuchen.
Das Programm berechnet für den Aufenthaltsort einer Raumsonde die beiden auf sie einwirkenden Gravitationskräfte und die Zentrifugalkraft und ermittelt so Richtung und Betrag von Beschleunigung und Geschwindigkeit der Sonde und damit deren neuen Ort nach einem Zeitschritt Δt (Euler-Cauchy-Verfahren).
Allerdings werden nur Bahnkurven ermittelt, die in der Ebene von Erde, Schwerpunkt und Mond liegen. Es ist also nicht möglich, die Bahn einer Sonde zu verfolgen, die ober- oder unterhalb dieser Ebene ausgesetzt wurde.
Aus didaktischer Sicht ist diese Reduktion besonders günstig, da die Verhältnisse der Kräfte noch einigermaßen vorstellbar bleiben. Ein weiterer Vorteil ergibt sich durch die Möglichkeit, die Bahn der Raumsonde auf die Fläche des Gravitationspotentials („Potentialgebirge“) abzubilden und das Ganze als Schrägbild zu zeichnen. Dadurch entsteht ein sehr anschaulicher Eindruck von der Topologie der energetischen Verhältnisse im rotierenden Erde-Mond-System.
Das Koordinatensystem, in dem die Bewegung der Raumsonde berechnet und gezeichnet wird, rotiert mit dem System Erde-Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt. Das bedeutet, dass Erde und Mond in diesem Bezugssystem ruhen, was eine übersichtliche Darstellung der Bahn der Raumsonde ermöglicht, denn man sieht, wie sich diese nur bezüglich Erde und Mond bewegt.

Die Simulation zeigt, dass L1, L2 und L3 offenbar keine stabilen Gleichgewichtspunkte sind. Topologisch ähneln sie einem Sattel.
L4 und L5 sind dagegen (sehr flache) Hügel und man sollte annehmen, dass eine Raumsonde diesen Hügel „herunterrutscht“ und mit der Zeit wegdriftet. Erstaunlicherweise geschieht das jedoch nicht, denn durch das hinab gleiten erhält die Raumsonde Geschwindigkeit und auf Grund der Rotation um den Schwerpunkt entsteht eine Corioliskraft, welche die Bahn so stark krümmt, dass verschlungene Wege um den Lagrangepunkt herum entstehen. Dabei entfernt sich die Raumsonde nur um ein bestimmtes Stück – sie bleibt räumlich also quasi ortsfest bezüglich Erde und Mond. Kurskorrekturen sind in der Regel nicht erforderlich.
L4 und l5 sind damit ideale Punkte für eine Raumstation, die Erde und Mond über lange Zeiträume gleichermaßen beobachten soll.

Die folgenden Screenshots zeigen die Bahn einer Raumsonde, die jeweils mit der Geschwindigkeit Null (bezüglich des mitrotierenden Koordinatensystems) an verschiedene Stellen in der Ebene von Erde und Mond gesetzt wurde.

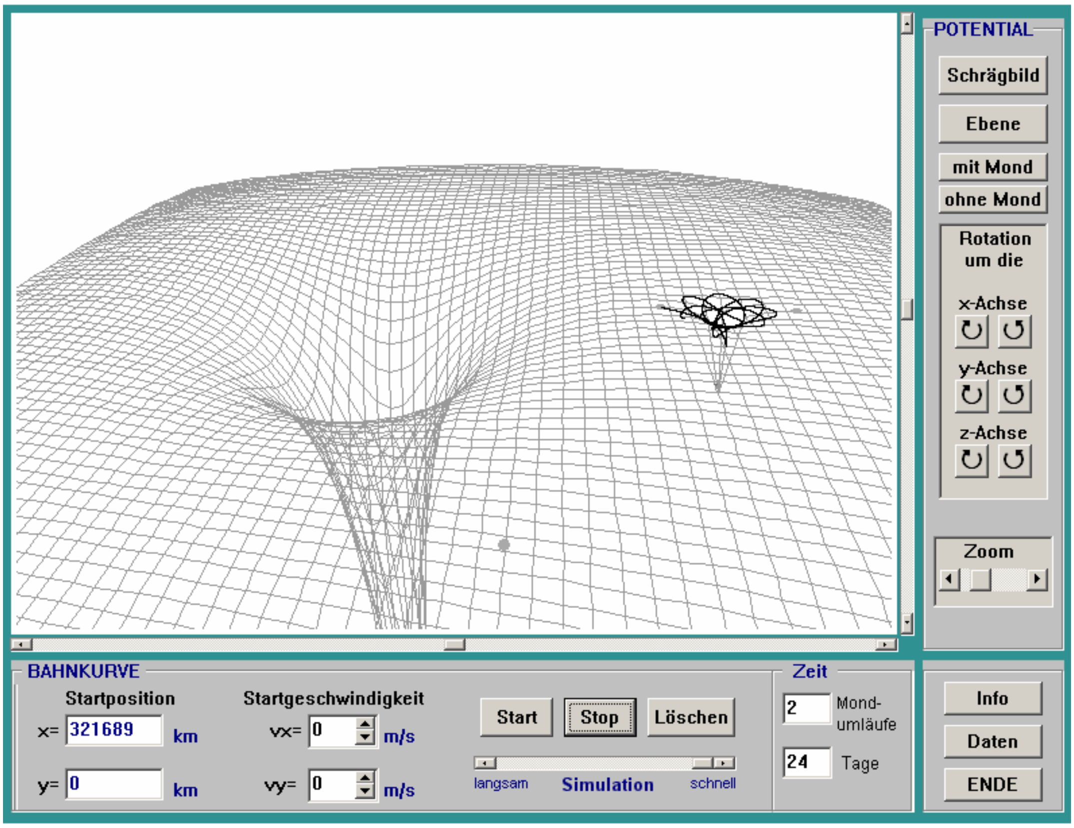
Ein wenig rechts von L1 driftet die Raumsonde in Richtung Mond, ein wenig links von L1 in Richtung Erde – die Satteltopologie der Umgebung verhindert, dass die Raumsonde trotz der wirkenden Corioliskräfte nach vorne oder nach hinten läuft.

In der Nähe von L5 sieht die Situation völlig anders aus: dort liegt kein Sattel vor, sondern ein Hügel, auf dem die Raumsonde –angetrieben durch Corioliskräfte- verschlungene Umläufe macht.

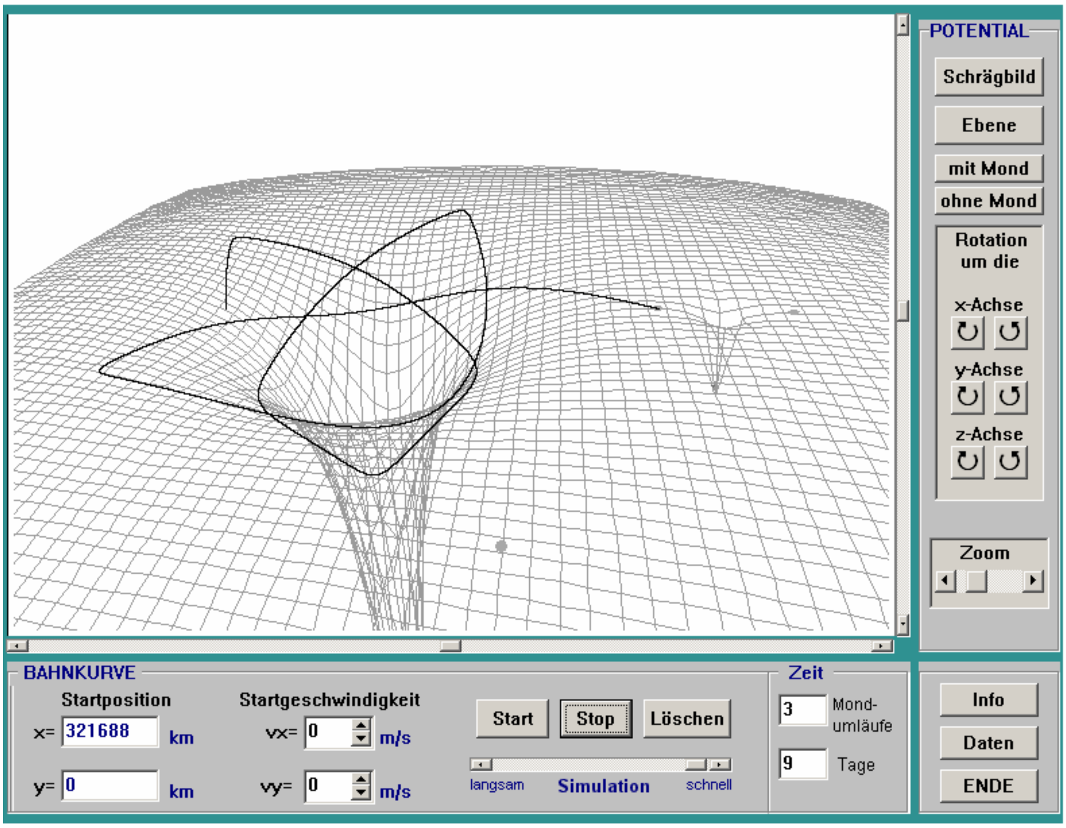
Bemerkung: Die Sattel- und die Hügelform der Lagrangepunkte lassen sich an dem Schrägbild des dreidimensional dargestellten Gravitationspotentials kaum erkennen, denn Sie sind nur sehr schwach ausgeprägt.

Matthias Borchardt
Tannenbusch-Gymnasium Bonn
borchardt.matthias@t-online.de

Start bei L1 (1km rechts vom Lagrangepunkt)



Start bei L1 (1km links vom Lagrangepunkt)



Bahnkurve in der Nähe von L5