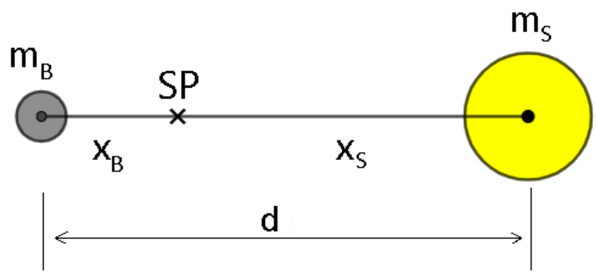
Herleitung der Massenfunktion f_m für Doppelsternsysteme

Ein Schwarzes Loch (m_B) und ein sichtbarer Stern (m_S) umkreisen den gemeinsamen Schwerpunkt SP auf Kreisbahnen.



Dann gilt:

$$m_B \cdot x_B = x_S \cdot m_S \quad \Leftrightarrow \quad x_B = x_S \cdot \frac{m_S}{m_B}$$

und mit $d = x_B + x_S$ ergibt sich $d = x_S \cdot \frac{m_S}{m_B} + x_S = x_S \cdot \left(1 + \frac{m_S}{m_B}\right)$. Somit ergibt sich für den Abstand der beiden Sterne $d = x_S \cdot \frac{m_B + m_S}{m_B}$. Diesen Term setzen wir weiter unten an passender Stelle ein.

Die Bewegung des sichtbaren Sterns (m_S) ergibt sich durch einen Kräfteansatz wie folgt:
Die Gravitation wirkt als kreisbildende Kraft, also als Zentripetalkraft, daher gilt: $F_Z = F_G$

$\frac{m_S \cdot v^2}{x_S} = \frac{G \cdot m_S \cdot m_B}{d^2} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot m_B \cdot x_S}{d^2}$ und mit $d = x_S \cdot \frac{m_B + m_S}{m_B}$ erhalten wir

$v^2 = \frac{G \cdot m_B \cdot x_S}{\left(x_S \cdot \frac{m_B + m_S}{m_B}\right)^2} = \frac{G \cdot m_B^3}{(m_B + m_S)^2 \cdot x_S}$. Den Abstand x_S des Sterns vom Schwerpunkt und die Umlaufgeschwindigkeit v verknüpfen wir mithilfe der Formel für die Bahngeschwindigkeit $v = \frac{2\pi \cdot x_S}{T} \quad \Leftrightarrow \quad x_S = \frac{v \cdot T}{2\pi}$. Dies eingesetzt in die obere v^2-Formel ergibt:

$$v^2 = \frac{G \cdot m_B^3 \cdot 2\pi}{(m_B + m_S)^2 \cdot v \cdot T} \quad \Leftrightarrow \quad v^3 = \frac{G \cdot m_B^3 \cdot 2\pi}{(m_B + m_S)^2 \cdot T}$$

Sortierter aufgeschrieben: $v^3 = \frac{2\pi \cdot G}{T} \cdot \frac{m_B^3}{(m_B + m_S)^2}$

Nehmen wir an, ein weit entfernter Beobachter ist in der Lage, die Geschwindigkeit des Sterns auf ihn zu und von ihm weg mithilfe des Sternspektrums (Verschiebung der Spektrallinien aufgrund des Dopplereffekts) zu bestimmen. Er würde dann eine Kurve der Radialgeschwindigkeiten während eines Umlaufs erhalten. Die Amplitude dieser Radialgeschwindigkeitskurve entspricht der Bahngeschwindigkeit v des Sterns aber nur dann, wenn der Beobachter auf die Kante der Bahnebene („edge-on“) schaut, der Inklinationswinkel i also den Wert 90° aufweist. Bei kleineren Neigungen der Bahnebene wird er eine Radialgeschwindigkeit von $v_R = v \cdot \sin(i)$ messen. Somit ergibt die obere Formel:

$v_R^3 = \frac{2\pi \cdot G}{T} \cdot \frac{m_B^3 \cdot \sin^3(i)}{(m_B + m_S)^2}$. Der Term $\frac{m_B^3 \cdot \sin^3(i)}{(m_B + m_S)^2}$ wird als Massenfunktion f_m bezeichnet.

Somit erhalten wir $v_R^3 = \frac{2\pi \cdot G}{T} \cdot f_m$.

Damit ergibt sich die folgende Beziehung für die Massenfunktion eines Doppelsternsystems:

$$\boxed{f_m = \frac{v_R^3 \cdot T}{2\pi \cdot G} = \frac{m_B^3}{(m_B + m_S)^2} \cdot \sin^3(i)}$$

Aus der Radialgeschwindigkeitskurve lässt sich die Amplitude $\mathbf{v_R}$ und die Umlaufdauer **T** leicht bestimmen. Die Masse des sichtbaren Sterns ergibt sich günstiger Weise aus dessen charakteristischen spektroskopischen Daten. Die Masse des Schwarzen Lochs könnten man dann berechnen, wenn der Inklinationswinkel i bekannt ist, was allerdings oft eine Schwierigkeit darstellt.

Herleitung der erweiterten Formel (Ellipsenbahn):

Bewegen sich die Komponenten auf elliptischen Bahnen mit der numerischen Exzentrizität ***e***, muss die obere Formel etwas erweitert werden. Es gilt dann:

$$\boxed{f_m = \frac{v_{RE}^3 \cdot T}{2\pi \cdot G} \cdot \left(1 - e^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{m_B^3}{(m_B + m_S)^2} \cdot \sin^3(i)}$$

Die größte Geschwindigkeit hat ein Körper auf seiner Ellipsenbahn an der Stelle, an dem er dem Schwerpunkt am nächsten kommt, dem Periastron. Dort gilt: $v_{Peri} = v_{RK} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, wobei v_{RK} die Radialgeschwindigkeit einer Kreisbahn mit dem Radius *a* (große Halbachse) ist. Im gegenüberliegenden Scheitelpunkt der Ellipse (Apastron) ist die Geschwindigkeit dagegen minimal, es gilt: $v_{Peri} = v_{RK} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$. Bei einer Radialgeschwindigkeitskurve einer elliptischen Sternbewegung bilden die beiden Geschwindigkeiten die Hoch- und die Tiefpunkte der Kurve. Der Mittelwert dieser beiden Werte wird als Amplitude der Radialgeschwindigkeitskurve definiert, also: $v_{RE} = \frac{v_{Peri} + v_{Apo}}{2} = \frac{1}{2} \cdot v_{RK} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right)$.

Wenn wir die Brüche unter den Wurzeln auf einen gemeinsamen Nenner bringen, ergibt sich:

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}+\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=\sqrt{\frac{(1+e)\cdot(1+e)}{(1+e)\cdot(1-e)}}+\sqrt{\frac{(1-e)\cdot(1-e)}{(1-e)\cdot(1+e)}}=\sqrt{\frac{(1+e)^2}{1-e^2}}+\sqrt{\frac{(1-e)^2}{1-e^2}}$$

$$=\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}+\frac{1-e}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Daher ergibt sich: $v_{RE} = \frac{1}{2}\cdot v_{RK}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{v_{RK}}{\sqrt{1-e^2}}$, also $v_{RK} = \sqrt{1-e^2}\cdot v_{RE}$.

Eingesetzt in $f_m = \frac{v_R^3\cdot T}{2\pi\cdot G}$ ergibt das $f_m = \frac{v_{RE}^3\cdot T}{2\pi\cdot G}\cdot\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}$.

Juni 2023

Matthias Borchardt