Formeln für das relativistische Zyklotron

Matthias Borchardt

Eine Computersimulation zum Synchro-Zyklotron finden Sie unter:
https://mabo-physik.de/synchrozyklotron

1. Für den (relativistischen) **Impuls p** ergibt sich:

   Ansatz: $F_{Rad} = F_L$ (Die Lorentzkraft wirkt als kreisbildende Kraft)

   $$\frac{m_v \cdot v^2}{r} = q \cdot v \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad m_v \cdot v = q r B$$

   Also: $\mathbf{p = q \cdot r \cdot B}$

   Dabei ist r der Radius der (halb)kreisförmigen Teilchenbahn im Zyklotron.

2. Für das Geschwindigkeitsverhältnis $\beta = \frac{v}{c}$ ergibt sich:

   $$\frac{E_0}{E_{ges}} = \frac{E_0}{\frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \sqrt{1-\beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1-\beta^2 = \left(\frac{E_0}{E_{ges}}\right)^2$$

   Daraus folgt: $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_{ges}}\right)^2}$

   a) Mit der kinetischen Energie:

      Wegen $E_{ges} = E_0 + E_{kin}$ gilt: $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_0 + E_{kin}}\right)^2}$

      Beim Zyklotron gilt: Die kinetische Energie der Teilchen ergibt sich aus der Beschleunigungsarbeit, die das elektrische Feld am Teilchen verrichtet. Wenn das Teilchen den Beschleunigungsspalt k-mal durchlaufen hat, gilt daher:
      $E_{kin} = k \cdot q \cdot U$, wobei U die Spannung ist, die an den D-förmigen Elektroden anliegt.
      Die Geschwindigkeit des Teilchens in Bezug zur Lichtgeschwindigkeit ergibt sich daher zu: $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_0 + k \cdot q \cdot U}\right)^2}$.

      Beispiel:
      B = 2T, U=800kV, Protonen (E_0 = 938,27 MeV), k=54,5 Spaltdurchgänge (Computersimulation):

      $$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{938{,}27 \cdot 10^6}{938{,}27 \cdot 10^6 + 54{,}5 \cdot 1 \cdot 800 \cdot 10^3}\right)^2} = 0{,}2946\,.$$

      Die Computersimulation ergibt als numerisch ermitteltes Ergebnis für die Endgeschwindigkeit: v/c = 0,2926.

b) Mit dem Impuls p:

Wegen $E_{ges}^2 = E_0^2 + p^2c^2$ ergibt sich aus $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_{ges}}\right)^2}$:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E_0^2 + (p\cdot c)^2}} = \sqrt{\frac{E_0^2 + (p\cdot c)^2 - E_0^2}{E_0^2 + (p\cdot c)^2}} = \sqrt{\frac{(p\cdot c)^2}{E_0^2 + (p\cdot c)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\frac{E_0^2 + (p\cdot c)^2}{(p\cdot c)^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{E_0}{p\cdot c}\right)^2}}$$

Beim Zyklotron gilt für den Impuls: $p = q\cdot r\cdot B$, sodass sich ergibt:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{E_0}{qrBc}\right)^2}} .$$

Die Geschwindigkeit der Teilchen wird also bei festgelegtem Radius des Zyklotrons allein durch die Stärke des Magnetfeldes B bestimmt.

Beispiel:
B = 2T, U=800kV, Protonen (E_0 = 938,27 MeV), Endradius der Bahn r=0,479m (Computersimulation):

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{938,27\cdot 10^6}{1\cdot 0,479\cdot 2\cdot c}\right)^2}} = 0,2927 .$$

Die Computersimulation ergibt als numerisch ermitteltes Ergebnis für die Endgeschwindigkeit: v/c = 0,2926.

---

3. Die **kinetische Energie** der Teilchen:

Allgemein gilt: $E_{ges} = E_0 + E_{kin} \Leftrightarrow E_{kin} = E_{ges} - E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - E_0$

Daraus ergibt sich: $E_{kin} = E_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$

Für das Zyklotron wählen wir den Ansatz:

$$E_{ges}^2 = E_0^2 + p^2c^2 \Rightarrow (E_0 + E_{kin})^2 = E_0^2 + p^2c^2$$

Daraus ergibt sich: $E_0 + E_{kin} = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} \Leftrightarrow E_{kin} = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} - E_0$.
Mit $p = q\cdot r\cdot B$ ergibt das:

$$E_{kin} = \sqrt{E_0^2 + (qrBc)^2} - E_0$$

Die kinetische Energie der Teilchen, die das Zyklotron verlassen, hängt also entscheidend vom Durchmesser des Zyklotrons und der Stärke des Magnetfeldes ab.

<u>Beispiel:</u>
B = 2T, U=800kV, Protonen (E_0 = 938,27 MeV), Endradius der Bahn r=0,479m (Computersimulation):

$$E_{kin} = \sqrt{(938{,}27\cdot 10^6)^2 + (1\cdot 0{,}479\cdot 2\cdot c)^2}\ \text{eV} - 938{,}27\cdot 10^6\ \text{eV} = 42{,}97\,\text{MeV}$$

Die Computersimulation ergibt als numerisch ermitteltes Ergebnis für die kinetische Endenergie E_{kin} = 42,95 MeV.

---

4. **Radius** des Zyklotrons

$E_{ges}^2 = E_0^2 + p^2c^2 \Rightarrow (E_0 + E_{kin})^2 = E_0^2 + p^2c^2$ und mit $p = q\cdot r\cdot B$ ergibt das:

$$(E_0 + E_{kin})^2 = E_0^2 + (qBc)^2\cdot r^2.$$

Umgeformt nach r:

$$r^2 = \frac{(E_0 + E_{kin})^2 - E_0^2}{(qBc)^2}$$

$$r = \frac{\sqrt{(E_0 + E_{kin})^2 - E_0^2}}{qBc}.$$

Die Formel eignet sich, wenn man berechnen möchte, welchen Durchmesser ein Zyklotron haben müsste, um eine bestimmte kin. **Endenergie** bei vorgegeben Magnetfeld zu erzeugen.

<u>Beispiel:</u>
B = 2T, Protonen (E_0 = 938,27 MeV).
Welchen Durchmesser müsste das Zyklotron aufweisen, um Protonen mit einer Endenergie von 500 MeV zu erzeugen?

$$r = \frac{\sqrt{(938{,}27\cdot 10^6 + 500\cdot 10^6)^2 - (938{,}27\cdot 10^6)^2}}{1\cdot 2\cdot 2{,}99792458\cdot 10^8}\ \text{m} = 1{,}818\,\text{m}.$$

Der Durchmesser des Zyklotrons sollte also etwa D = 3,64 m betragen.

5. **Beschleunigung und Kraft** in der SRT

Es gilt der Zusammenhang:

$$F = \frac{m_0 \cdot a}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} \quad , \qquad \text{also} \qquad \boxed{a = \frac{F}{m_0}\cdot\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3}$$

<u>Herleitung:</u>

$$F(t) = \dot{p}(t) = \frac{d}{dt}\left(m_v \cdot v\right) = \frac{dm_v}{dt}\cdot v + m_v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dm_v}{dt}\cdot v + m_v \cdot a$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot v + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot a$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot m_0 \cdot v + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot a$$

$$= \left(\left(\frac{-2v\cdot\frac{dv}{dt}}{c^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot m_0 \cdot v + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot a$$

$$= \left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot m_0 \cdot a + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot a$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot m_0 \cdot a + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} m_0 \cdot a$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot m_0\, a\cdot\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\cdot\frac{v^2}{c^2}+1\right)$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot m_0\, a\cdot\left(\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\cdot\frac{v^2}{c^2}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{+1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot m_0\, a\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{v^2}{c^2}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \frac{m_0\, a}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3}$$