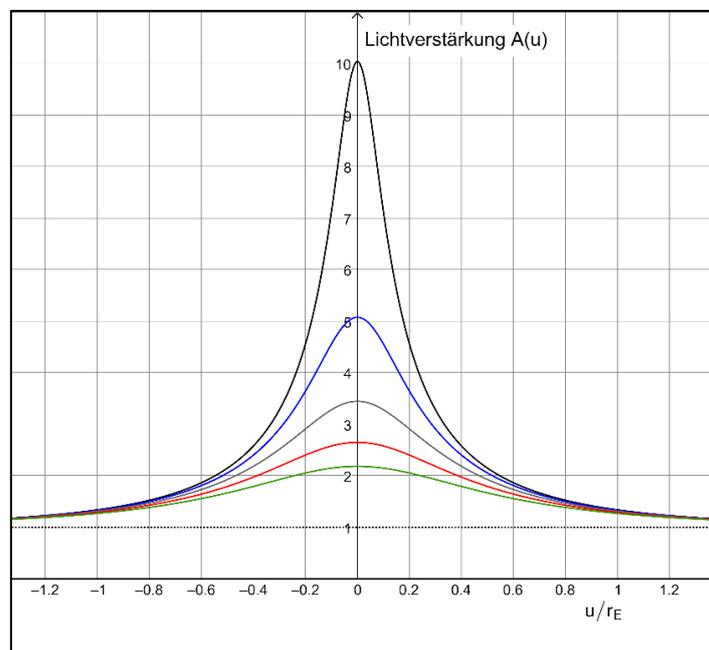
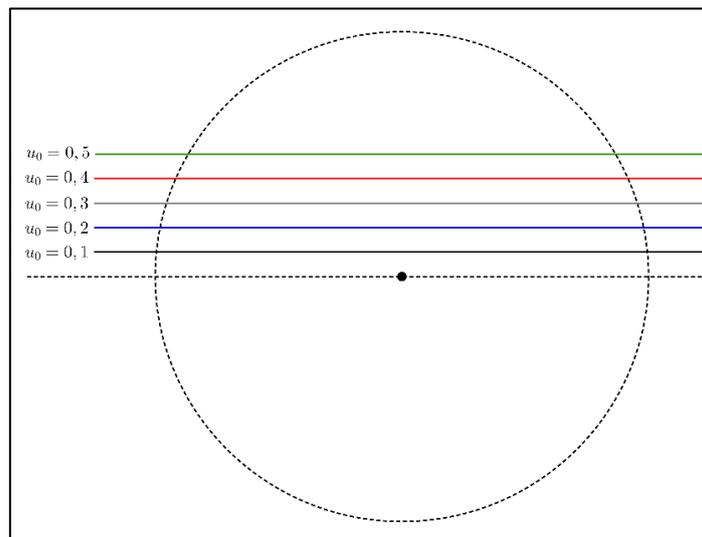


## *Microensing durch Schwarze Löcher*

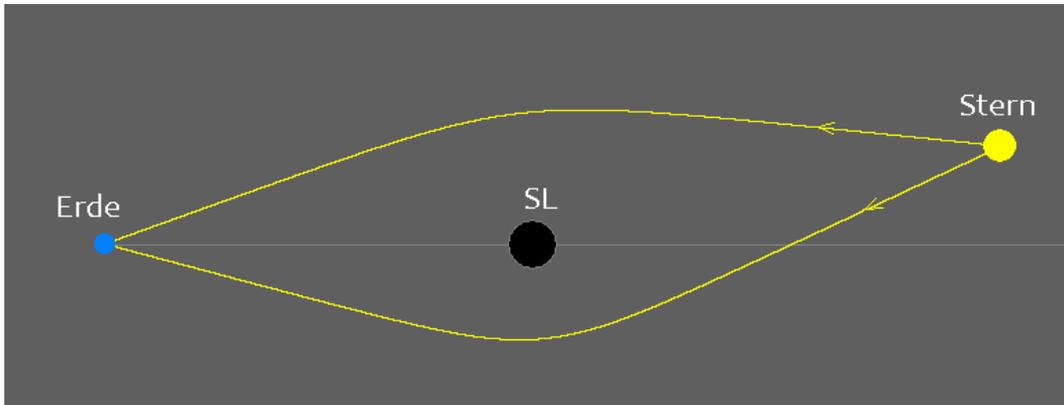
### Herleitung der Linsengleichung und Berechnung der Masse von Schwarzen Löchern

Matthias Borchardt

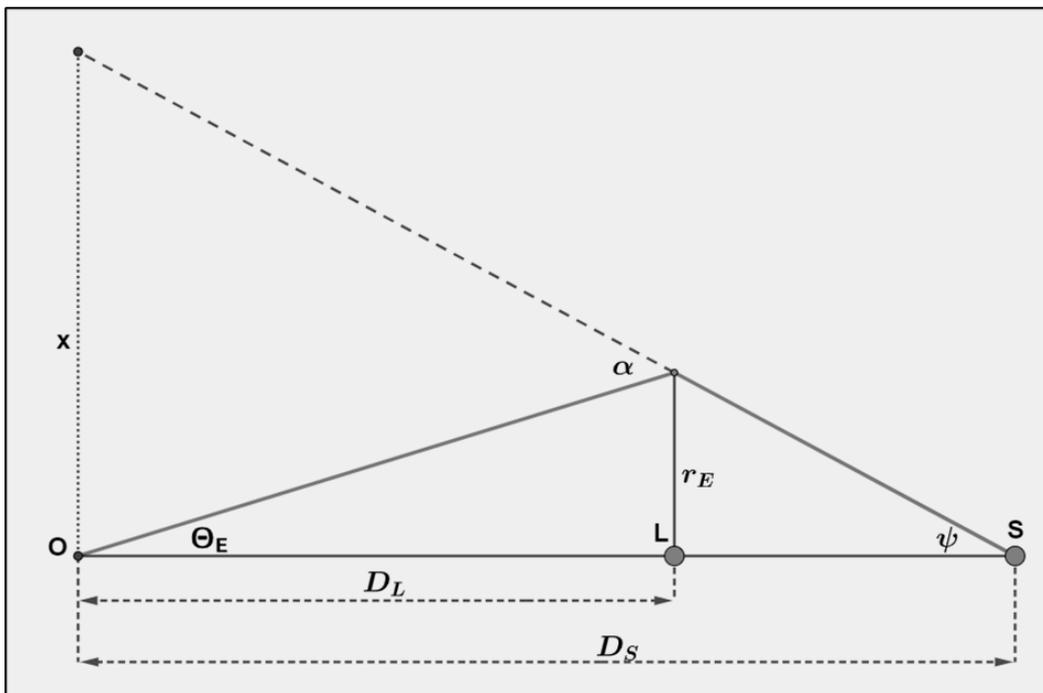
Wenn ein stellares Schwarzes Loch vor einem Stern vorbeizieht, wird das Licht dieses Hintergrundsterns (Source) aufgrund der Gravitationswirkung des Schwarzen Lochs (Lens) so abgelenkt, dass der Beobachter (Observer) ein deformiertes und verzerrtes Bild des Sterns wahrnimmt. Dabei tritt eine deutliche Lichtverstärkung auf, die von den Positionen der beiden Objekte abhängig ist. Je näher die Linse am Stern vorbeizieht (projiziert auf die Himmelsebene), desto deutlicher ist die Aufhellung der Lichtquelle. Die Abbildung zeigt die kompakte Gravitationslinse mit dem angedeuteten Einsteinradius und fünf verschiedene Passagen im Abstand  $u_0 = 0,1$  bis  $u_0 = 0,5$ , wobei  $u_0$  in Einheiten des Einsteinradius  $r_E$  angegeben ist.



Liegen Beobachter, Linse und die Lichtquelle auf einer Linie, erscheint der Stern als heller Lichtring. Der Radius dieses Rings wird **Einsteinradius**  $r_E$  genannt, der Winkel, unter dem der Radius von der Erde aus gemessen wird, heißt **Einsteinwinkel**  $\Theta_E$ . Viele Größen, die bei quantitativen Betrachtungen des Linseneffekts auftauchen, werden in den Einheiten des Einsteinradius bzw. Einsteinwinkels gemessen und angegeben.



Die obere Abbildung zeigt eine Situation, bei der die Linse gegenüber der Quelle etwas verschoben ist. Im Folgenden vereinfachen wir diese Abbildung, indem wir die Lichtwege als gerade Linien darstellen und die Linse zentral vor dem Stern positionieren.



Wir betrachten einen Lichtstrahl, der um den Winkel  $\alpha_E$  abgelenkt wurde, sodass wir ihn auf der Erde wahrnehmen können. Für diesen Winkel liefert die **Allgemeine Relativitätstheorie** die Formel:

$$\alpha_E = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{r_E \cdot c^2}$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante und  $M_L$  die Masse der Linse sind.

## Der Einsteinradius

Mithilfe des Winkels  $\alpha_E$  und der Geometrie der Anordnung lassen sich Formeln für den Einsteinradius  $r_E$  und den Einsteinwinkel  $\Theta_E$  herleiten:

Der Strahlensatz liefert:  $\frac{x}{r_E} = \frac{D_S}{D_S - D_L} \Leftrightarrow x = \frac{D_S}{D_S - D_L} \cdot r_E$ .

Die Winkel in der Abbildung werden im Bogenmaß angegeben. Da die Winkel in der Realität extrem klein ausfallen, verwenden wir eine leichte Näherung. Es gilt:  $\Theta_E = \frac{r_E}{D_L}$  und  $\Psi = \frac{x}{D_S}$ .

Der Außenwinkelsatz liefert:  $\Theta_E + \Psi = \alpha_E \rightarrow \frac{r_E}{D_L} + \frac{x}{D_S} = \alpha_E$ .

Wir setzen die Hilfsgröße  $x$  (Formel s.o.) ein und erhalten

$$\Theta_E + \Psi = \alpha_E \rightarrow \frac{r_E}{D_L} + \frac{D_S \cdot r_E}{(D_S - D_L)D_S} = \alpha_E.$$

Kürzen und ausklammern liefert  $r_E \cdot \left( \frac{1}{D_L} + \frac{1}{D_S - D_L} \right) = \alpha_E$ .

Mit  $\alpha_E = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{r_E \cdot c^2}$  wird daraus:  $r_E \cdot \left( \frac{1}{D_L} + \frac{1}{D_S - D_L} \right) = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{r_E \cdot c^2}$ .

Die beiden Brüche in der Klammer fassen wir noch zusammen:

$$r_E \cdot \frac{D_S}{D_L \cdot (D_S - D_L)} = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{r_E \cdot c^2}$$

Aufgelöst nach  $r_E$  liefert dies die wichtige Formel für den **Einsteinradius**:

$$r_E = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_L \cdot D_L \cdot (D_S - D_L)}{c^2 \cdot D_S}}$$

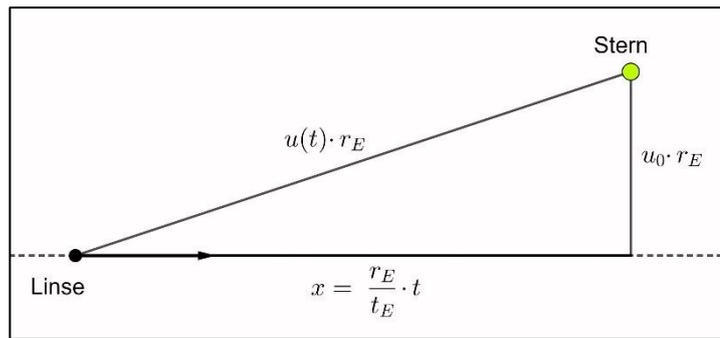
Der **Einsteinwinkel** ergibt sich dann aus  $\Theta_E = \frac{r_E}{D_L}$  zu  $\Theta_E = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_L \cdot (D_S - D_L)}{c^2 \cdot D_L \cdot D_S}}$

Dies lässt sich auch schreiben als:

$$\Theta_E = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_L}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)}$$

## Eine Formel für die Lichtverstärkung

Eine Gravitationslinse bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit an einem im Hintergrund liegenden Stern vorbei und erzeugt einen Mikrolinsen-Effekt. Bei der formalen Beschreibung dieses Ereignisses ist es üblich, alle Abstände in Einheiten des Einsteinradius  $r_E$  bzw. des Einsteinwinkels  $\Theta_E$  anzugeben.



Für die Geschwindigkeit der Linse gilt  $v_L = \frac{r_E}{t_E}$ . Der Abstand zum Zeitpunkt  $t$  sei  $u(t) \cdot r_E$ , der kleinste Abstand (Stoßparameter) soll  $u_0 \cdot r_E$  sein. Die Größen  $u(t)$  und  $u_0$  erscheinen in dieser Darstellung also als dimensionslose Faktoren.

Der Satz des Pythagoras ergibt dann  $u(t) \cdot r_E = \sqrt{u_0^2 \cdot r_E^2 + \left(\frac{t}{t_E}\right)^2 \cdot r_E^2}$ , was sich zu

$$u(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{t}{t_E}\right)^2} \text{ vereinfachen lässt.}$$

Für den Lichtverstärkungsfaktor  $A$  gilt (ohne Herleitung) die Formel  $A(t) = \frac{u^2(t) + 2}{u(t) \cdot \sqrt{u^2(t) + 4}}$

Mithilfe von  $u(t)$  und  $A(t)$  lassen sich die typischen Helligkeitskurven wie sie auf der Seite 1 abgebildet sind, berechnen und zeichnen. Das Maximum der jeweiligen Kurve entsteht bei

$t=0$  und lässt sich durch  $A_{\max} = \frac{u_0^2 + 2}{u_0 \cdot \sqrt{u_0^2 + 4}}$  beschreiben.

Ist also die maximale Lichtverstärkung bekannt, lässt sich daraus der Stoßparameter  $u_0$  ableiten, was sich für weitere Berechnungen durchaus als hilfreich erweisen kann.

### Ergänzung:

Die Helligkeit von Sternen, also auch die Lichtverstärkung  $A(t)$  wird üblicherweise in der Einheit „Magnituden“ angegeben. Zudem ist nicht selten das Licht eines gelinsten Sterns durch das Licht eng benachbarter Sternenscheibchen „verunreinigt“. Es liegt dann eine Mischung aus dem Licht der eigentlichen Quelle (Stern) und dem benachbarten Hintergrund vor. Dies beeinflusst die Form der Lichtkurve bisweilen enorm. Formal wird dies wie folgt behandelt: Sei  $F_S$  der Lichtfluss des Sterns und  $F_H$  der Lichtfluss des Hintergrunds, so ergibt sich der gesamte Lichtfluss  $F(t)$  während des Mikrolinsenereignisses zu  $F(t) = A(t) \cdot F_S + F_H$ . Wir führen

noch den Lichtfluss  $F_0 = F_S + F_H$  ein, den wir ohne Linseneffekt messen würden und das Verhältnis  $g = \frac{F_H}{F_S}$ .

Dann gilt mit  $F_H = g \cdot F_S$  für den Lichtfluss  $F(t) = A(t) \cdot F_S + g \cdot F_S = F_S \cdot (1 + g)$ .

Außerdem ersetzen wir  $F_S$  durch  $F_S = F_0 - F_H = F_0 - g \cdot F_S \Leftrightarrow F_S = \frac{F_0}{1+g}$

Wir setzen den letzten Term in  $F(t) = F_S \cdot (1 + g)$  ein und erhalten  $F(t) = F_0 \cdot \frac{A(t)+g}{1+g}$ .

Das Mischungsverhältnis  $g = \frac{F_H}{F_S}$  lässt sich durch genaue Analyse der Sternaufnahmen meist recht gut abschätzen. Für die Umrechnung in Magnituden gilt nun:

Der scheinbare Helligkeitsunterschied (in Magnituden) zweier Sterne mit den Lichtflüssen  $F_1$  und  $F_2$  wird definiert durch  $\Delta m = 2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$ . Für unsere Betrachtungen ergibt sich daraus

$$\Delta m = 2,5 \cdot \log\left(\frac{F(t)}{F_0}\right) = 2,5 \cdot \log\left(\frac{F_0 \cdot \frac{A(t)+g}{1+g}}{F_0}\right) = 2,5 \cdot \log\left(\frac{A(t)+g}{1+g}\right).$$

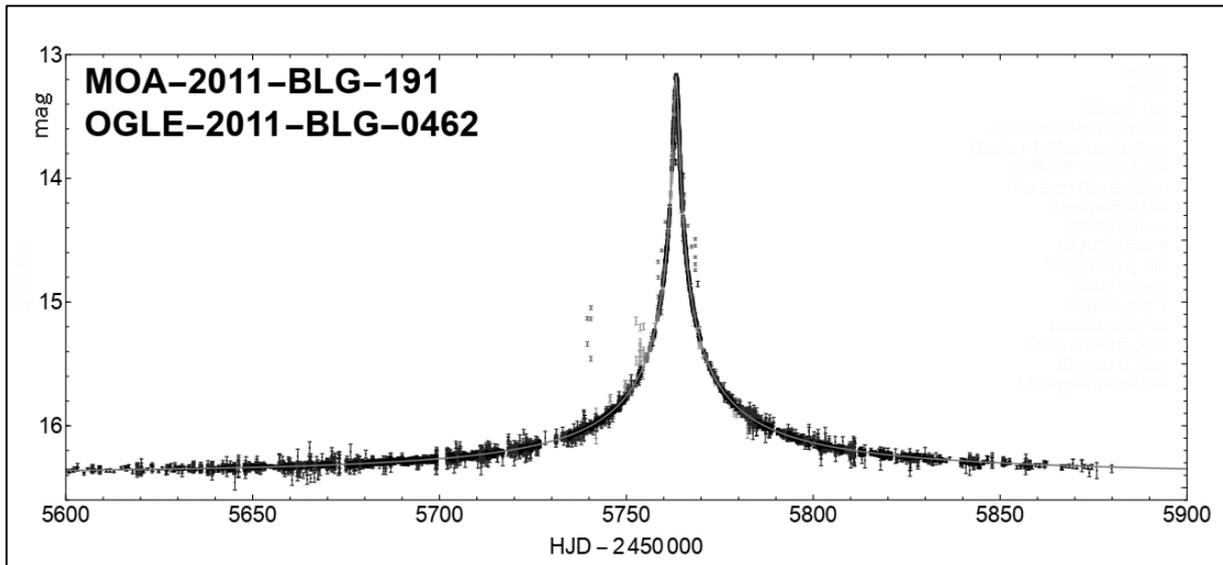
Sei  $m_0$  die scheinbare Helligkeit des Sterns (inkl. Hintergrundlicht), dann ergibt sich der Hel-

ligkeitsverlauf des Mikrolinseneffekts aus  $m(t) = m_0 - \Delta m = m_0 - 2,5 \cdot \log\left(\frac{A(t)+g}{1+g}\right)$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Magnitudenskala invers zu verstehen ist – je kleiner der Magnitudenwert, desto heller der Stern.

### Ein Beispiel: MOA-2011-BLG-191 / OGLE-2011-BLG-0462

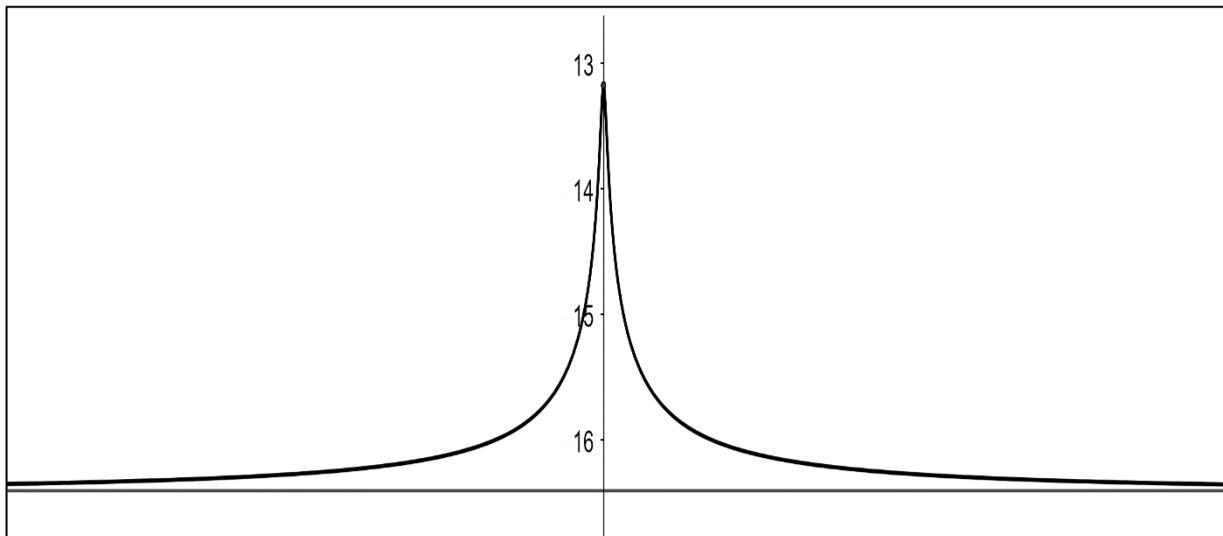
Im Februar 2022 wurde die Entdeckung eines isolierten, stellaren Schwarzen Lochs mithilfe der Mikrolinsen-Methode bekannt gegeben. Aufgrund der hohen Lichtverstärkung konnte der Linseneffekt bei diesem Ereignis besonders gut beobachtet werden. Während verschiedener Mess-Kampagnen konnten innerhalb von fast 6 Jahren Position und Helligkeit des gelinsten Sterns mithilfe des Hubble-Teleskops astrometrisch und optisch (Helligkeit) genau vermessen werden. Die untere Abbildung zeigt die Lichtkurve des Ereignisses.



Wir wenden nun die oben beschriebenen Formeln  $u(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{t}{t_E}\right)^2}$  und

$$A(t) = \frac{u^2(t)+2}{u(t) \cdot \sqrt{u^2(t)+4}} \text{ sowie } m(t) = m_0 - 2,5 \cdot \log\left(\frac{A(t)+g}{1+g}\right) \text{ an und setzen die in der}$$

Veröffentlichung des Forscherteams angegebenen Parameter ein, nämlich  $u_0 = 0,0027$ ,  $t_E = 271$  Tage,  $g = 19$  und  $m_0 = 16,4$  mag. Mithilfe der Mathematik-Software Geogebra ergibt sich damit die folgende simulierte Helligkeitskurve:

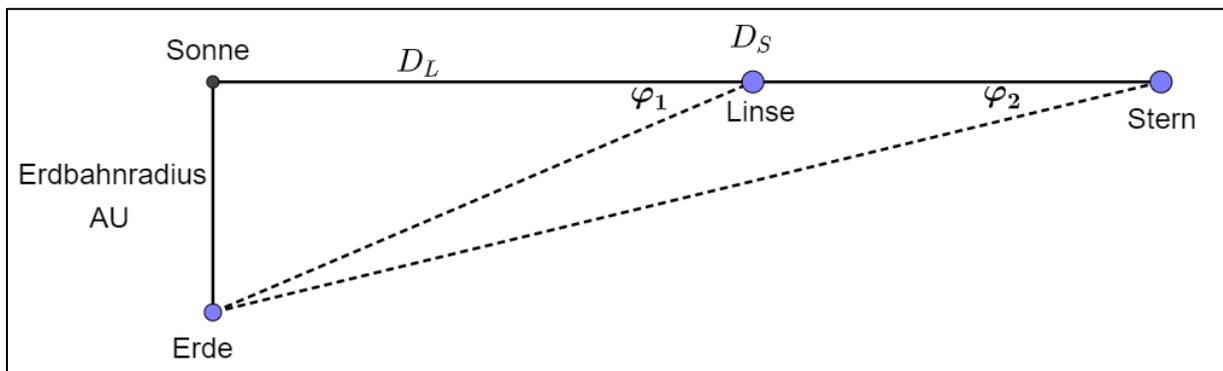


Wie man sieht, beschreibt die simulierte Lichtkurve die experimentell ermittelte Kurve recht genau. Dies bestätigt, dass das beobachtete Lichtverstärkungsphänomen tatsächlich durch die Theorie des „microlensing“ beschreibbar ist und das beobachtete Ereignis das Ergebnis eines Gravitationslinseneffekts war.

## Wie lässt sich Masse der Gravitationslinse bestimmen?

Mithilfe der Formel für den Einsteinwinkel ließe sich im Prinzip die Masse der Gravitationslinse (Schwarzes Loch) berechnen. Die Entfernung  $D_S$  des sichtbaren Hintergrundsterns lässt sich in im Rahmen bestimmter Fehlergrenzen beispielsweise mithilfe des Lichtspektrums bestimmen. Allerdings stößt man bei zwei weiteren Parametern auf erheblich größere Schwierigkeiten. So ist es in der Regel nicht möglich, allein aus der Lichtkurve des Microlensing-Ereignisses den Einsteinradius  $\Theta_E$  und die Entfernung  $D_L$  der Linse zu bestimmen.

In den letzten Jahren haben sich jedoch zwei Verfahren etabliert, mit denen sich diese Probleme in günstigen Fällen umgehen lassen. Das ist zum einen die Möglichkeit, den **Parallaxenwinkel** des Ereignisses zu messen und zum anderen die Beobachtung des sogenannten **Lichtschwerpunkts** des deformierten Sternenlichts.



Wir betrachten Linse und Stern von der Erde aus, wenn diese sich in der abgebildeten Position befindet. Es gilt dann:  $\varphi_1 = \frac{AU}{D_L}$  und  $\varphi_2 = \frac{AU}{D_S}$ . Die sogenannte relative Parallaxe ist der Differenzwinkel  $\pi_{rel} = \varphi_1 - \varphi_2 = AU \cdot \left( \frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right) = AU \cdot \frac{D_S - D_L}{D_L \cdot D_S}$ . Dieser Parallaxenwinkel wird

üblicherweise in Bezug zum Einsteinwinkel  $\Theta_E$  wie folgt formuliert:  $\pi_E = \frac{\pi_{rel}}{\Theta_E} = \frac{AU}{\Theta_E} \cdot \frac{D_S - D_L}{D_L \cdot D_S}$

Eine Umformung ergibt:  $\frac{D_S - D_L}{D_L \cdot D_S} = \frac{\Theta_E \cdot \pi_E}{AU}$  was wir in die Formel des Einsteinwinkels einsetzen können:

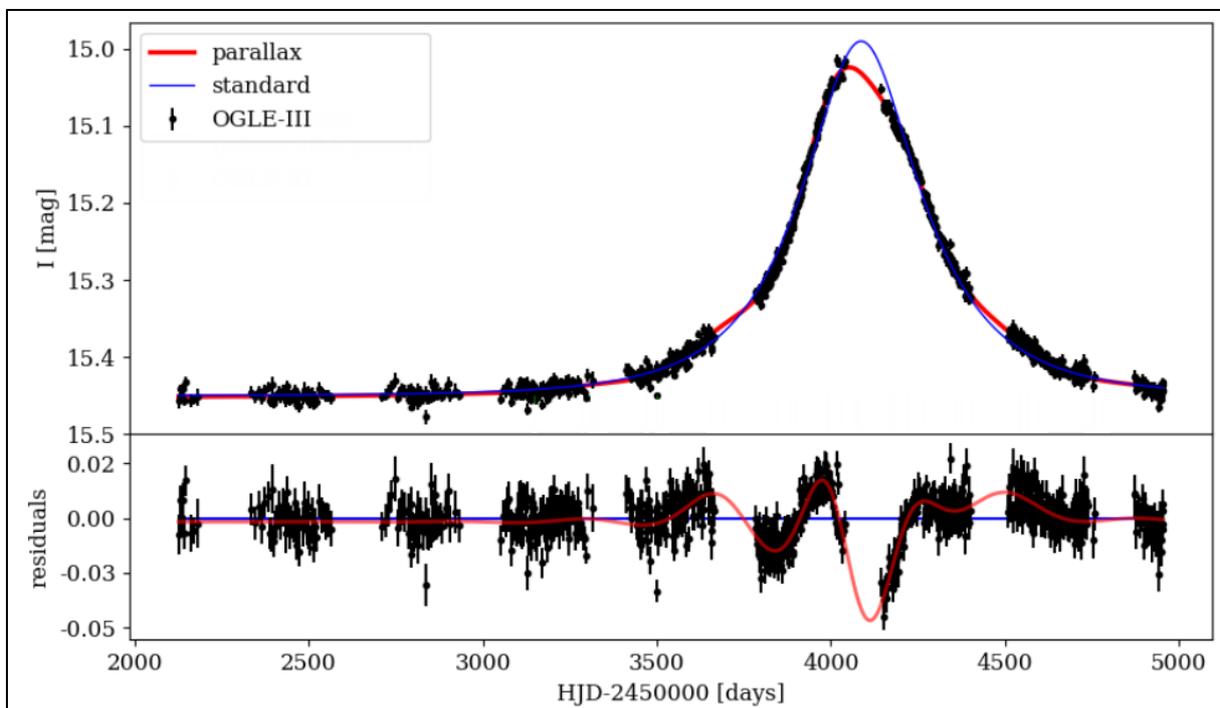
$$\Theta_E = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_L \cdot (D_S - D_L)}{c^2 \cdot D_L \cdot D_S}} = \sqrt{\frac{4 \cdot G}{c^2 \cdot AU} \cdot M_L \cdot \Theta_E \cdot \pi_E} = \sqrt{k \cdot M_L \cdot \Theta_E \cdot \pi_E} .$$

Dies ergibt für die Masse der Gravitationslinse die Formel  $\Theta_E^2 = k \cdot M_L \cdot \Theta_E \cdot \pi_E$  bzw.

$$\boxed{M_L = \frac{\Theta_E}{k \cdot \pi_E}} \quad \text{mit } k = \frac{4 \cdot G}{c^2 \cdot AU} = 1,986 \cdot 10^{-38} \frac{1}{\text{kg}}$$

Der Einsteinwinkel  $\Theta_E$  lässt sich unter günstigen Bedingungen mithilfe der Verschiebung des Lichtschwerpunkts bestimmen, was weiter unten näher ausgeführt werden soll.

Wenden wir uns zunächst dem **Parallaxenwinkel**  $\pi_E$  zu. Aufgrund der Bewegung der Erde um die Sonne ergeben die Helligkeitsmessungen des Sterns während des Mikrolinsenereignisses keine symmetrische, glockenförmige Kurve mehr. Voraussetzung für diese sichtbare Veränderung ist allerdings, dass das System für das Durchlaufen der Helligkeitskurve viel Zeit benötigt – wenigstens ein halbes Jahr, besser deutlich länger. Bei kürzeren Zeitintervallen macht sich die Parallaxenverschiebung nämlich kaum bemerkbar. Die untere Abbildung zeigt ein Mikrolinsenereignis, bei dem die Abweichungen der Messpunkte von der symmetrischen Modellkurve deutlich sichtbar werden. An der Zeitachse erkennt man, dass das Ereignis etwa drei Jahre gedauert hat. Die Standard-Modellkurve passt nicht zu den Messwerten. Baut man allerdings in das Modell den Einfluss des Parallaxenwinkels  $\pi_E$  an geeigneter Stelle ein, lässt sich eine optimale Anpassung und damit ein Wert für den Parameter  $\pi_E$  finden. Der mathematische Formalismus ist allerdings sehr komplex, da die Positionen der Erde auf ihrer Bahn, die Neigung der Bahnebene und vieles mehr Berücksichtigung finden müssen.

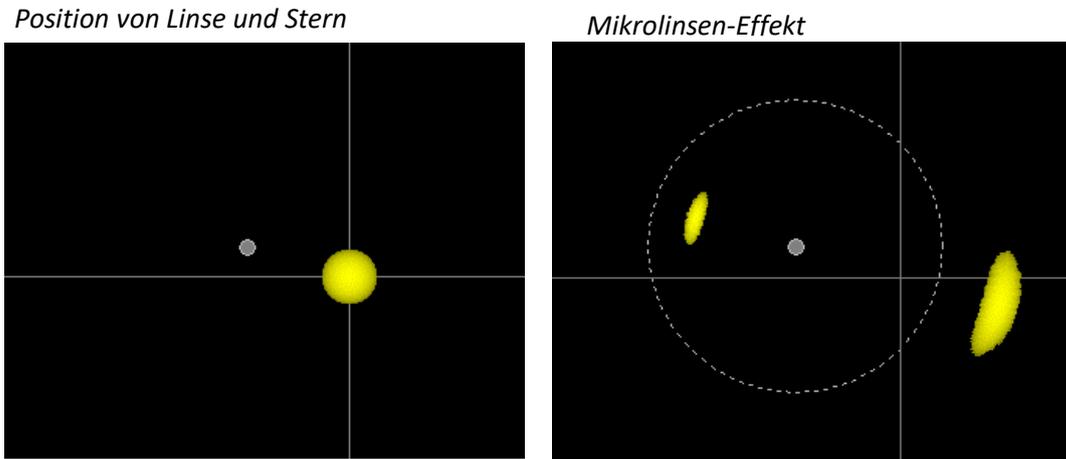


Im unteren Teil des Diagramms sind übrigens die Abweichungen (residuals) der Messwerte vom Standardmodell (ohne Berücksichtigung der Parallaxe) dargestellt. Man erkennt eine periodische Schwankung dieser Differenzen – entstanden durch die Bewegung der Erde um die Sonne.

Die Bestimmung des Einsteinwinkels  $\Theta_E$  ist leider deutlich schwieriger als die Ermittlung des Parallaxenwerts  $\pi_E$ , denn selbst bei zentraler Begegnung von Stern und Linse lässt sich die ringförmige Struktur des gelinsten Objekts nicht erkennen. Dazu ist das Ereignis viel zu weit entfernt und der Einsteinradius zu klein. Sichtbar ist nur die deutliche Aufhellung des

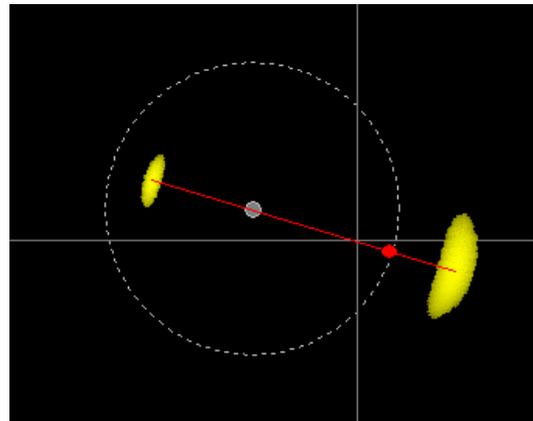
Sternenlichts, also der Effekt der Lichtverstärkung. Wie bereits oben erwähnt, können wir aber in günstigen Fällen den Einsteinwinkel  $\Theta_E$  aus der Verschiebung des **Lichtschwerpunkts** bestimmen – zumindest theoretisch, denn das Verfahren verlangt eine extrem gute Winkelauflösung, um die Position des Sternenlichts zu bestimmen. Welche Idee steckt hinter diesem Verfahren?

Wenn die Gravitationslinse vor dem Hintergrundstern vorbeizieht, wird das Licht des Sterns in zwei Lichtflecke zerlegt, wie die untere rechte Abbildung zeigt.



Diese Aufspaltung der Lichtquelle lässt sich im Fernrohr nicht auflösen, weil die beiden Objekte viel zu weit entfernt sind. Allerdings lässt sich eine minimale Verschiebung des „Lichtschwerpunktes“ erkennen – vorausgesetzt, die Winkelauflösung zur Bestimmung der Lichtfleckposition ist empfindlich genug. Dies ist in der Tat gegeben, seitdem der Astrometrik-Satellit GAIA extrem genaue Ortsbestimmungen von Himmelsobjekte ermöglicht. Der Schwerpunkt des Lichts im oberen Simulationsbeispiel liegt in etwa bei dem rot eingezeichneten Punkt, also ein wenig von der ursprünglichen Sternposition entfernt.

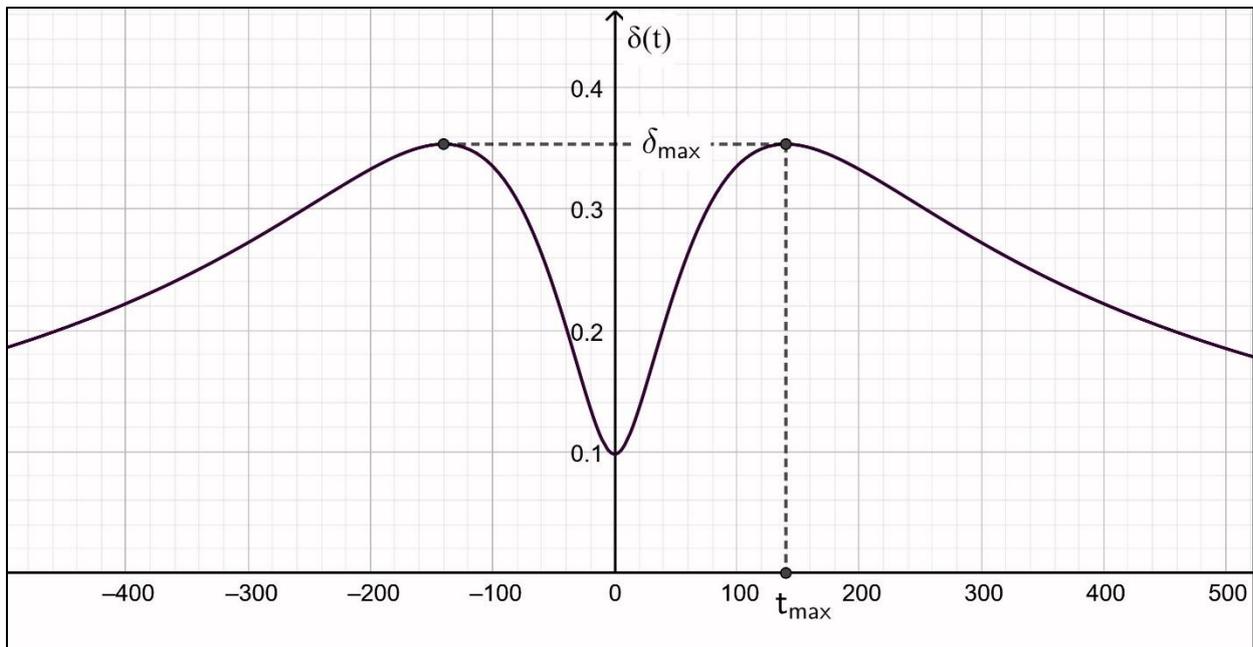
Diese Verschiebung des Lichtschwerpunkts eröffnet eine Möglichkeit, den Einsteinwinkel  $\Theta_E$  zu bestimmen, wobei die maximale Auslenkung  $\delta_{\max}$  des Lichtschwerpunkts eine entscheidende Rolle spielt.



Die zeitliche Entwicklung des Abstands des Lichtschwerpunkts von der eigentlichen Position

des Sterns wird nämlich durch die Formel  $\delta(t) = \frac{\sqrt{u_0^2 + \left(\frac{t}{t_E}\right)^2}}{u_0^2 + \left(\frac{t}{t_E}\right)^2 + 2} \cdot \Theta_E$  beschrieben. Für  $u_0 = 0,2$

und  $t_E = 100$  ergibt sich beispielsweise eine Verschiebungskurve wie unten abgebildet.



Das Maximum der Kurve und der Zeitpunkt  $t_{\max}$  ergeben sich aus der ersten Ableitung der Funktion  $\delta(t)$ . Wir erhalten  $t_{\max} = t_E \cdot \sqrt{2 - u_0^2}$  und damit einen Term für die maximale Verschiebung des Lichtschwerpunkts von  $\delta_{\max} = \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \Theta_E \approx 0.354 \cdot \Theta_E$ . Dieses Ergebnis ist unabhängig von  $u_0$ . Kennt man also die größte Abweichung des Lichtschwerpunkts von der eigentlichen Sternposition, dann lässt sich daraus der Einsteinradius durch  $\Theta_E = \sqrt{8} \cdot \delta_{\max}$  berechnen.

Zu Erinnerung: Die Masse der Gravitationslinse ergibt sich aus der Formel  $M_L = \frac{\Theta_E}{k \cdot \pi_E}$  mit

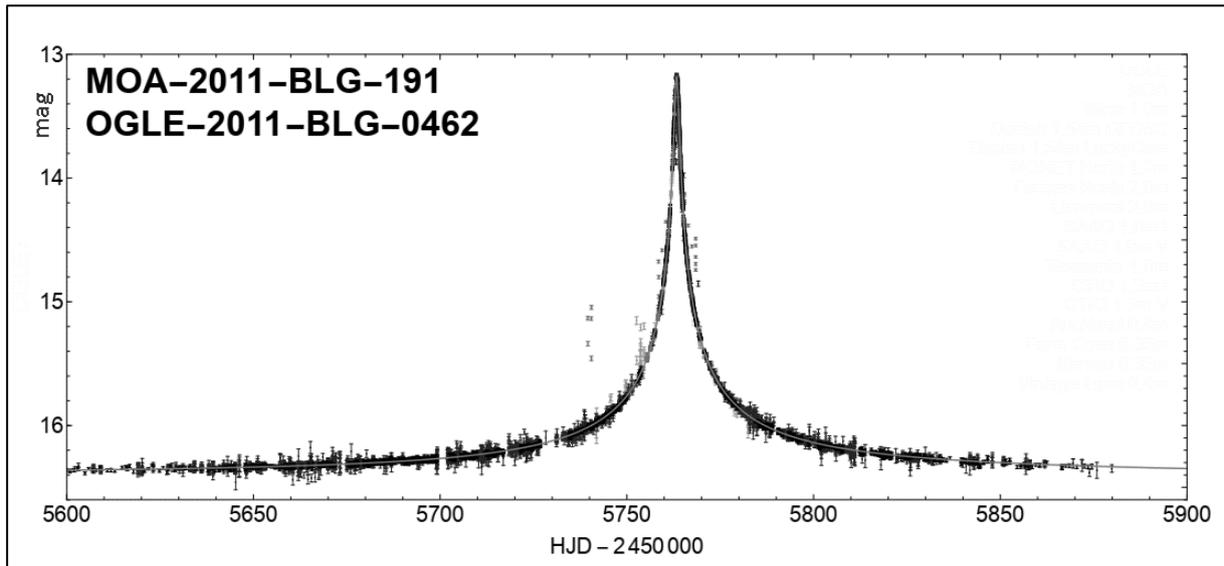
$$k = \frac{4 \cdot G}{c^2 \cdot \text{AU}} = 1,986 \cdot 10^{-38} \frac{1}{\text{kg}}.$$

Kennt man also den Einsteinradius  $\Theta_E$  und den Parallaxenwert  $\pi_E$ , lässt sich die Masse der Gravitationslinse berechnen, was für die Einschätzung, ob es sich bei einer unsichtbaren Linse um ein Schwarzes Loch oder eher um einen Neutronenstern handelt, von Bedeutung ist.

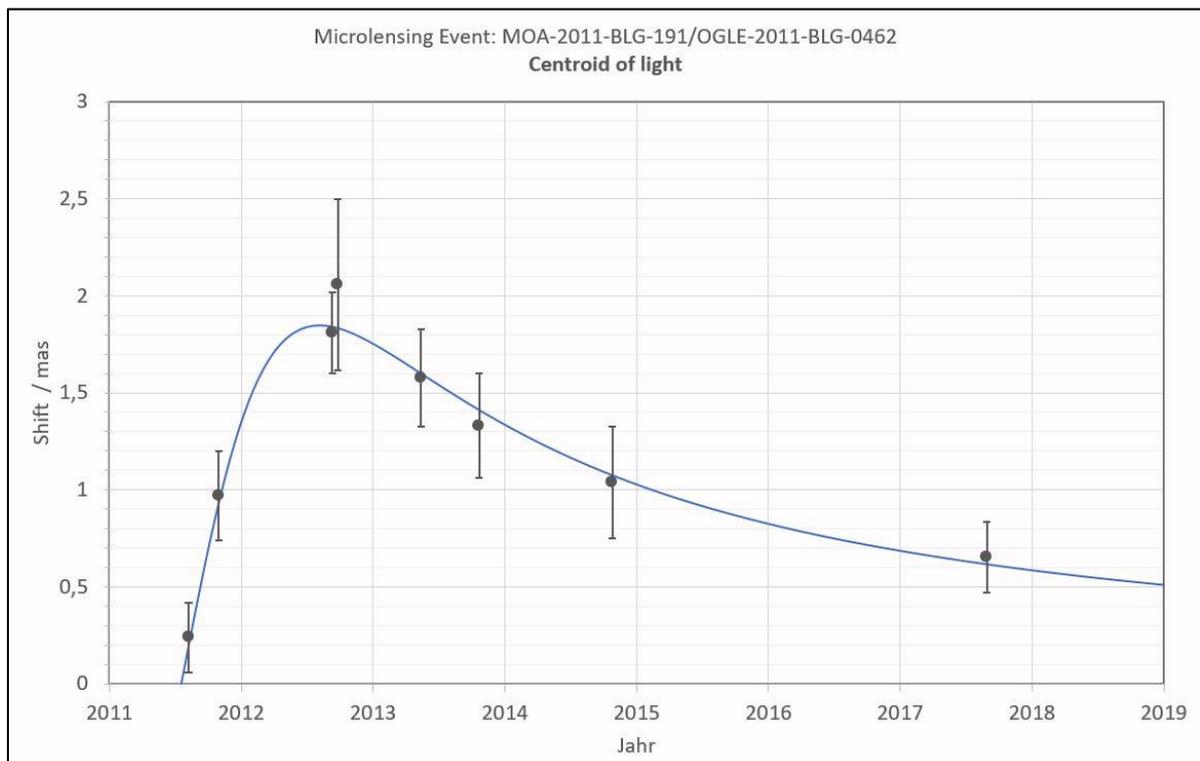
### Das Mikrolinsen-Ereignis MOA-2011-BLG-191

Wir wenden uns nochmal dem oben angeführten Beispiel des Mikrolinsen-Ereignisses zu, das 2022 zur Veröffentlichung kam. Die Lichtkurve erscheint auf den ersten Blick ziemlich symmetrisch und eine Verzerrung aufgrund eines Parallaxeneffekts nicht erkennbar. Dies liegt zum Teil daran, dass die Lichtkurve durch das Licht in der Nähe liegender Sterne stark kontaminiert ist und Abweichungen innerhalb der eigentlich Helligkeitskurve des gelinsten Sterns dadurch verdeckt werden. Die Autoren der Publikation weisen aber darauf hin, dass sich der Einfluss der Parallaxe vor allem in den Flügeln der Lichtkurve bemerkbar macht. Eine optimale

Anpassung der theoretischen Lichtkurve an die Messdaten ergab sich demnach mit einem Parallaxenwert von  $\pi_E = 0,0894$ .



Der Einstein-Winkel  $\Theta_E$  ergibt sich aus der maximalen Verschiebung des Lichtschwerpunkts. Diese Verschiebung konnte bei dem Mikrolinsen-Ereignis bestimmt werden.



Auch wenn die Messwerte eine recht große Fehlerbreite aufweisen, lässt sich mithilfe einer Anpassungskurve das Maximum der Lichtauslenkung zu  $\delta_{\max} = 1,85$  Bogensekunden ermitteln.

Wegen  $\delta_{\max} = \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \Theta_E \Leftrightarrow \Theta_E = \sqrt{8} \cdot \delta_{\max}$  ergibt sich ein Einsteinwinkel von

$$\Theta_E = \sqrt{8} \cdot 1,85 \text{ MilloBogSek} = 5,23 \text{ MilliBogSek}.$$

Im Bogenmaß wird dies zu  $\Theta_E = 0,00523 \text{ BogSek} = \frac{0,00523}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} = 2,536 \cdot 10^{-8} \text{ rad}.$

Nun können wir die **Masse der Gravitationslinse** berechnen. Wir verwenden die oben herge-

leitete Formel  $M_L = \frac{\Theta_E}{k \cdot \pi_E}$  mit  $k = \frac{4 \cdot G}{c^2 \cdot \text{AU}} = 1,986 \cdot 10^{-38} \frac{1}{\text{kg}}$  und erhalten

$$M_L = \frac{\Theta_E}{k \cdot \pi_E} = \frac{2,536 \cdot 10^{-8}}{1,986 \cdot 10^{-38} \cdot 0,0894} \text{ kg} = 1,428 \cdot 10^{31} \text{ kg} \approx 7,1 M_\odot$$

Da die Gravitationslinse weder optisch noch spektroskopisch sichtbar ist, können wir davon ausgehen, dass es sich bei diesem kompakten Objekt tatsächlich um ein **stellares Schwarzes Loch mit einer Masse von etwa sieben Sonnenmassen** handelt.

### Entfernung der Gravitationslinse

Wir hatten bereits eine Formel für den Einsteinwinkel  $\Theta_E$  hergeleitet, nämlich

$$\Theta_E = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_L}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)}.$$

Der Publikation von *Sahu et al.* entnehmen wir, dass der Abstand  $D_S$  des sichtbaren Sterns mithilfe seines Spektrums und seiner scheinbaren Helligkeit auf einen Wert von etwa  $D_S = 5,9 \text{ kpc} \pm 1,3 \text{ kpc}$  geschätzt wird. Die Fehlerbandbreite von 1,3 kpc zeigt bereits, dass eine exakte Abstandsbestimmung offenbar recht schwierig war. Dennoch lässt sich mithilfe von  $D_S$  die Entfernung der unsichtbaren Gravitationslinse, also des Schwarzen Lochs, berechnen. Dazu formen wir die obere Formel zunächst nach  $D_L$  um:

$$\begin{aligned} \Theta_E &= \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_L}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)} \Leftrightarrow \Theta_E^2 = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{c^2} \cdot \left( \frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right) \Leftrightarrow \frac{\Theta_E^2 \cdot c^2}{4 \cdot G \cdot M_L} = \frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{D_L} &= \frac{\Theta_E^2 \cdot c^2}{4 \cdot G \cdot M_L} + \frac{1}{D_S} \Leftrightarrow D_L = \frac{1}{\frac{\Theta_E^2 \cdot c^2}{4 \cdot G \cdot M_L} + \frac{1}{D_S}} \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Werte für  $\Theta_E$ ,  $M_L$  und  $D_S$  sowie die Konstanten einsetzen erhalten wir

$$D_L = \frac{1}{\frac{\Theta_E^2 \cdot c^2}{4 \cdot G \cdot M_L} + \frac{1}{D_s}} = \frac{1}{\frac{(2,536 \cdot 10^{-8})^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{4 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot (7,1 \cdot 1,98 \cdot 10^{30})} + \frac{1}{5900 \cdot 3,0857 \cdot 10^{16}}} \text{ m}$$

$$= 4,781 \cdot 10^{19} \text{ m} = 1,55 \text{ kpc} = 5053 \text{ Lichtjahre}$$

Demnach dürfte das unsichtbare, stellare **Schwarze Loch rund 5000 Lichtjahre von uns entfernt** sein.

---

Matthias Borchardt, 2022  
Tannenbusch-Gymnasium Bonn

---

### Quellen:

- Kailash C. Sahu, et al.  
An Isolated Stellar-mass Black Hole Detected through Astrometric Microlensing.  
The Astrophysical Journal 2022-07-01  
DOI: [10.3847/1538-4357/ac739e](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac739e)
- D.P. Bennett, et al.  
Gravitational Microlensing Events Due to Stellar Mass Black Holes  
The Astrophysical Journal 579, 2002  
<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0109467v2>
- Ł. Wyrzykowski, et al.  
Black hole, neutron star and white dwarf candidates from microlensing with OGLE-III  
MNRAS 458, 3012–3026 (2016)  
<https://arxiv.org/abs/1509.04899v2>
- Martin Dominik, Kailash C. Sahu  
Astrometric Microlensing of Stars  
<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805360v2>
- Krzysztof A. Rybicki, et al.  
On the accuracy of mass measurement for microlensing black holes as seen by Gaia and OGLE  
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 476, Issue 2, p.2013-2028  
<https://arxiv.org/abs/1802.03258v1>
- Borchardt, Matthias  
<https://mabo-physik.de/schwarze-loecher>

