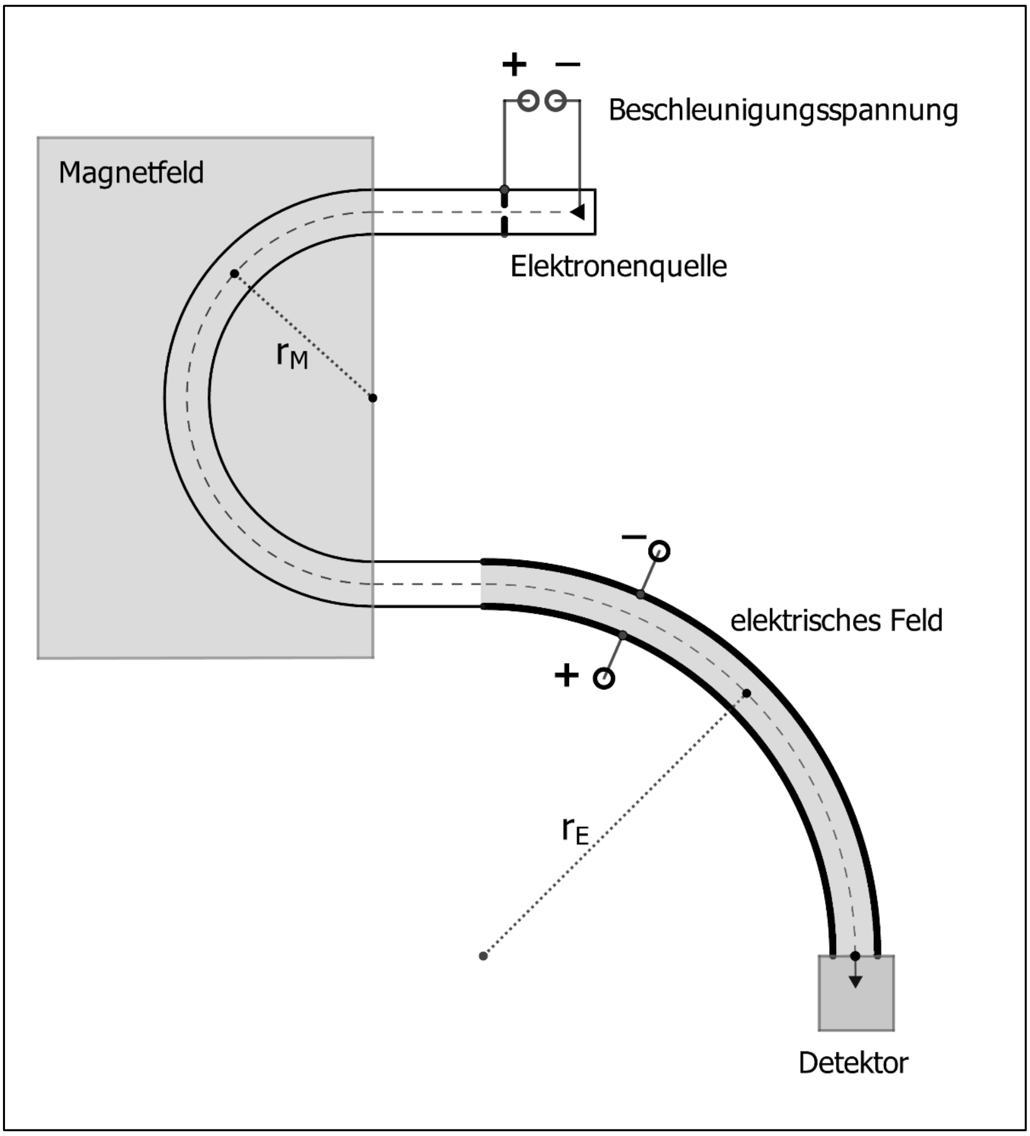
**Je schneller desto träger**

Matthias Borchardt

Im Jahre 1963 wurde an der Universität Zürich ein Präzisionsexperiment zur relativistischen Massenzunahme von Elektronen durchgeführt. Ziel des Experimentes war es, die Formel für die relativistische Massenzunahme $m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ mit hoher Messgenauigkeit zu testen.

Der Versuchsaufbau ist unten skizziert. Elektronen werden mit einer sehr hohen Spannung $U_a$ beschleunigt, um sie auf relativistische Geschwindigkeiten zu bringen. Die Elektronen durchfliegen danach ein homogenes Magnetfeld, dessen Feldstärke je nach Geschwindigkeit der Elektronen gerade so eingestellt wird, dass die Elektronen sich auf einem genau vorgegebenen Halbkreis bewegen und so um 180° umgelenkt werden. Danach gelangen die Elektronen in einen zylindersymmetrischen Plattenkondensator (elektrisches Feld), dessen elektrische Feldstärke so eingestellt wird, dass die Elektronen einen Viertelkreis fliegend um 90° abgelenkt werden. Die genaue Einstellung wird mit einem Detektor kontrolliert, in den die Elektronen gelangen.



Praktisch erfolgt die Messung folgendermaßen:
Zuerst wird das B-Feld auf exakt 20mT eingestellt. Die Beschleunigungsspannung $U_a$ wird so geregelt, dass die Elektronen auf dem Sollkreis durch das Magnetfeld fliegen.
Anschließend wird das elektrische Feld so eingestellt, dass die Elektronen auch im elektrischen Feld auf einer optimalen Bahn fliegen, sodass sie den Detektor erreichen können. Das elektrische Feld hat dann den Wert $E = 2{,}95529 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$. Die beiden Radien betragen $r_m$=0,5 m und $r_E$=1,0 m.

**Aufgaben:**

---

1) Zeichnen Sie in die Grafik die Orientierung des Magnetfeldes ein.

2) Erklären Sie, warum die Elektronen in beiden Feldern auf Kreisbahnen fliegen.

3) Im Magnetfeld wirken die Lorentzkraft und im elektrischen Feld die elektrische Feldkraft als kreisbildende Kräfte. Sie wirken also jeweils als Zentripetalkraft, sodass wir schreiben können: $F_Z = F_L$ und $F_Z = F_{el}$. Leiten Sie mithilfe dieser Ansätze die folgenden Formeln für die Geschwindigkeit und die Masse der Elektronen her:
$$v = \frac{E \cdot r_E}{B \cdot r_M} \quad \text{und} \quad m = \frac{e \cdot B^2 \cdot r_M^2}{E \cdot r_E}.$$

4) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Elektronen und geben Sie an, wieviel Prozent der Lichtgeschwindigkeit das ist?

5) Berechnen Sie mithilfe Ihres Ergebnisses aus Aufgabe 4) die relativistische Masse (dynamische Masse) der schnellen Elektronen mit der relativistischen Formel
$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$
($m_0$ ist die Ruhemasse des Elektrons und c ist die Lichtgeschwindigkeit,
$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.)
Wievielmal schwerer sind die schnellen Elektronen als ruhende Elektronen?

6) Berechnen Sie nun die Masse der schnellen Elektronen mithilfe der zweiten Formel aus Aufgabe 3). Wievielmal schwerer sind die schnellen Elektronen als ruhende Elektronen?

7) Vergleichen Sie das Ergebnis, das sich mithilfe der Relativitätstheorie ergibt (Aufgabe 5) mit dem Ergebnis, das sich aus dem Experiment ergibt (Aufgabe 6) und äußern Sie sich zu der Frage, ob das Experiment geeignet war, die Vorhersage der Relativitätstheorie bzgl. der relativistischen Massenzunahme, zu bestätigen.

## LÖSUNGEN

1) Anwendung der Linken-Hand Regel ergibt, dass das Magnetfeld aus der Papierebene auf den Betrachter gerichtet ist.

2) Im homogenen Magnetfeld wirkt auf das Elektron, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt eine Lorentzkraft mit konstantem Betrag. Diese Kraft wirkt stets senkrecht zur Bewegungsrichtung und wirkt daher kreisbildend, also als Radialkraft.
Da das Kondensatorfeld kreisförmig gekrümmt ist, wirkt auch die el. Feldkraft als Radialkraft, da sie bei dieser Feldform ebenfalls senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen wirkt.

3) Die Lorentzkraft erscheint als Radialkraft:
$$F_L = F_Z$$
$$\frac{m \cdot v^2}{r_M} = e \cdot v \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot v^2 = e \cdot v \cdot B \cdot r_M$$
und

Die el. Feldkraft wirkt als Radialkraft
$$F_{el} = F_Z$$
$$\frac{m \cdot v^2}{r_E} = e \cdot E \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot v^2 = e \cdot E \cdot r_E$$
Rechte Seiten gleichsetzen ergibt: $e \cdot v \cdot B \cdot r_M = e \cdot E \cdot r_E \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{E \cdot r_E}{B \cdot r_M}$ .

Aus $\frac{m \cdot v^2}{r_M} = e \cdot v \cdot B$ ergibt sich $m = \frac{e \cdot B \cdot r_M}{v} = \frac{e \cdot B \cdot r_M}{\frac{E \cdot r_E}{B \cdot r_M}} = \frac{e \cdot B \cdot r_M \cdot B \cdot r_M}{E \cdot r_E} = \frac{e \cdot B^2 \cdot r_M^2}{E \cdot r_E}$

4) $v = \frac{E \cdot r_E}{B \cdot r_M} = \frac{2{,}95529 \cdot 10^6 \cdot 1}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5} \frac{m}{s} = 295529000 \frac{m}{s} = 0{,}9857786349 \cdot c$, also ca. 98,578% der Lichtgeschwindigkeit.

5) $$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0{,}9857786349)^2}} = 5{,}950643601 \cdot m_0$$

6) $$m = \frac{e \cdot B^2 \cdot r_M^2}{E \cdot r_E} = \frac{e \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}5^2}{2{,}95529 \cdot 10^6 \cdot 1} \text{ kg} = 5{,}421384913 \cdot 10^{-30} \text{ kg} = 5{,}951430058 \cdot m_0$$

7) Die Abweichung der beiden Werte liegt bei etwa 0,1 Promille. Eine sehr präzise Bestätigung der relativistischen Massenzunahme.