

Ein Linearbeschleuniger für Protonen

Der weltweit erste funktionsfähige Linearbeschleuniger wurde bereits in den 1920-er Jahren an der Technischen Hochschule Aachen aufgebaut und getestet. Dieser Beschleuniger war von dem norwegischen Physiker Rolf Wideröe konstruiert worden und basierte auf der Idee, die geladenen Teilchen durch Driftröhren zu schicken, die an einer hochfrequenten Wechselspannung angeschlossen waren.

- a) Informieren Sie sich im Internet, wie ein Linearbeschleuniger dieses Typs aufgebaut ist und wie er funktioniert. Recherche-Hinweis:

<https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/bewegte-ladungen-feldern/ausblick/linearbeschleuniger>

- b) Öffnen Sie das Programm [Linearbeschleuniger.exe](#)¹, lesen Sie die Info-Box zum Programm und machen Sie sich mit den Funktionen der Simulation vertraut.

- c) Protonen werden in einem Vorbeschleuniger durch eine Spannung U_B beschleunigt.

Leiten Sie her: Die Protonen erhalten dadurch die Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m_p} \cdot U_B}$.

- d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Protonen, die mit einer Spannung von $U_B = 100 \text{ kV}$ beschleunigt wurden ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$).

- e) Wenn ein Proton aus Aufgabe 4 den Beschleuniger mit 10 Driftröhren durchlaufen hat, wurde es 10-mal beschleunigt, nämlich einmal im Vorbeschleuniger mit der Spannung U_B und 9-mal in den Zwischenräumen der 10 Driftröhren.

Begründen Sie: Wenn die angelegte Wechselspannung ebenfalls einen Scheitelwert von U_B aufweist, erhält das Proton nach Durchlaufen des Beschleunigers die Geschwindigkeit

$$v_{10} = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot \frac{e}{m_p} \cdot U_B} .$$

- f) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Protonen, die einen 10-Röhren-Beschleuniger durchlaufen haben und vergleichen Sie Ihr Rechenergebnis mit dem Ergebnis, das Ihnen die Computersimulation liefert.

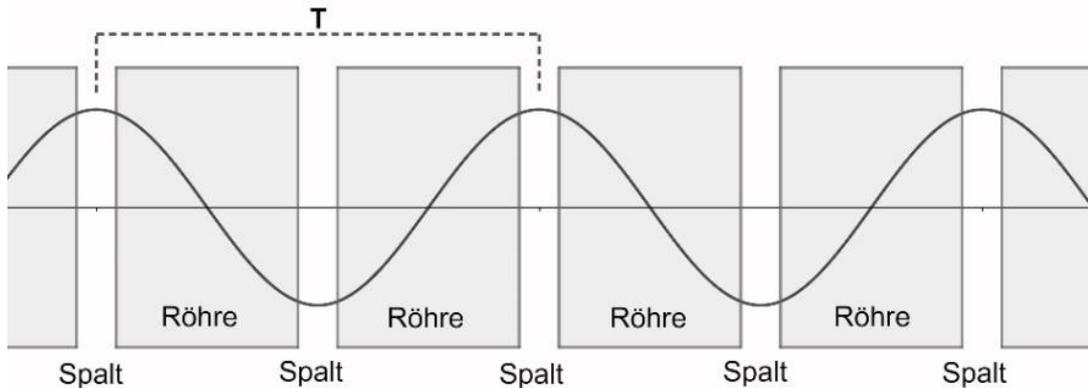
- g) Ab 10% der Lichtgeschwindigkeit sollte man eigentlich mit den Formeln der Relativitätstheorie rechnen. Überlegen Sie, ob das hier notwendig ist.

- h) Angenommen, Sie würden anstelle von Protonen Elektronen ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) beschleunigen: Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit sich dann ergeben würde. Warum ist das Ergebnis nicht realistisch?

¹ <https://mabo-physik.de/linearbeschleuniger/>

- i) Der zeitliche Verlauf der angelegten Wechselspannung ist in dem unteren Diagramm aufgetragen. Eingezeichnet sind die Zeitabschnitte, in denen das Elektron innerhalb einer Röhre bzw. innerhalb eines Beschleunigungs-Spaltess sein sollte.

Begründen Sie, warum die unten abgebildete Verteilung von Rohrabschnitten und Zwischenräumen eine optimale Beschleunigung erzeugt.



- j) Die Teilchen benötigen zum Durchlaufen der Röhren stets die gleiche Zeit. Dennoch nimmt die räumliche Länge der Röhren von links nach rechts zu. Erklären Sie die Zusammenhänge.
- k) Begründen Sie: Die Länge des ersten Zylinders muss $L_1 = \frac{T}{2} \cdot v_0$ betragen, wobei T die Periodenlänge der Wechselspannung ist und v_0 die Eintrittsgeschwindigkeit.
- l) Gehen Sie davon aus, dass die Spannung $U_B = 100 \text{ kV}$ beträgt und die Frequenz f der Wechselspannung genau 20 MHz sein soll. Berechnen Sie die Länge des ersten Zylinders.
- m) Protonen sollen nun mit einer Scheitelspannung von $U_B = 200 \text{ kV}$ beschleunigt werden. Berechnen Sie die Frequenz, die man in der Simulation einstellen muss, sowie die Endgeschwindigkeit der Protonen. Beachten Sie, dass Sie dazu die Eintrittsgeschwindigkeit v_0 entsprechend der 200 kV neu berechnen müssen. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe der Simulation.

Lösungen:

- a) Es wird die Beschreibung eines einfachen Driftröhren-Beschleunigers nach dem sogenannten Wideröe-Prinzip erwartet. Der Rechetipp bietet dazu gute Möglichkeiten. Auch wenn Beschleuniger dieses Bautyps heute nicht mehr verwendet werden, sind die physikalischen Zusammenhänge hier gut erkennbar. Vom Standpunkt der Didaktik erscheint der Rückgriff auf diesen historischen Beschleunigertyp daher sinnvoll. Moderne Konzepte, die mit Alvarez-Strukturen, Wanderwellen oder stehenden Wellen arbeiten, sind wesentlich schwieriger zu verstehen und setzen Kenntnisse über das Verhalten von EM-Wellen in metallischen Resonatoren voraus.
- b) Sollten Sie keine Möglichkeit haben, das Programm zu verwenden, lassen sich die meisten Aufgaben des Arbeitsblattes dennoch gut bearbeiten.
- c) Diese Formel sollte im Unterricht bereits im Zusammenhang mit der Braunschen Röhre oder dem Fadenstrahlrohr behandelt worden sein. Der Ansatz lautet: Die Arbeit, die das elektrische Feld während des Beschleunigungsvorgangs verrichtet, wird vollständig in kinetische Energie verwandelt. Daher gilt: $e \cdot U_B = \frac{1}{2} m_p \cdot v_0^2 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m_p} \cdot U_B}$.

$$d) v_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{1,6022 \cdot 10^{-19}}{1,6726 \cdot 10^{-27}} \cdot 100\,000} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4,377 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- e) Das Proton hat zehnmal einen Energiezuwachs von $e \cdot U_B$ erfahren. Daher gilt:

$$10 \cdot e \cdot U_B = \frac{1}{2} m_p \cdot v_{10}^2 \Leftrightarrow v_{10} = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot \frac{e}{m_p} \cdot U_B}$$

$$f) v_{10} = \sqrt{20 \cdot \frac{1,6022 \cdot 10^{-19}}{1,6726 \cdot 10^{-27}} \cdot 100\,000} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 13,8413 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Computersimulation liefert $v_{10} = 13,836 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Der Wert ist geringfügig niedriger als das Rechenergebnis, da man nicht davon ausgehen kann, dass das Proton in der Simulation die Beschleunigungsspalte genau bei 100 KV passiert, sondern in der Regel bei leicht tieferen Werten.

- g) Die Endgeschwindigkeit liegt bei etwa 4,6% der Lichtgeschwindigkeit. Relativistische Effekte darf man daher vernachlässigen.

$$h) v_{10} = \sqrt{20 \cdot \frac{1,6022 \cdot 10^{-19}}{9,1094 \cdot 10^{-31}} \cdot 100\,000} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 593 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,977 \cdot c. \text{ Dies ist fast doppelte Lichtgeschwindigkeit. Der klassische Lösungsansatz ist hier also nicht zulässig.}$$

- i) Das geladene Teilchen „spürt“ im Beschleunigungsspalt stets die maximale Spannung.
- j) Da die Teilchen immer schneller werden, sie aber stets die gleiche Zeit für das Durchlaufen eines Zylinders benötigen, müssen diese entsprechend länger werden.
- k) Der Zylinder wird ungefähr in einer halben Schwingungsperiode durchlaufen.

$$l) L_1 = \frac{T}{2} \cdot v_0 = \frac{1}{2 \cdot f} \cdot v_0 = \frac{1}{2 \cdot f} \cdot v_0 = \frac{1}{2 \cdot 20 \cdot 10^6} \cdot 4,377 \cdot 10^6 \text{ m} = 0,109425 \text{ m}.$$

$$m) v_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{1,6022 \cdot 10^{-19}}{1,6726 \cdot 10^{-27}} \cdot 200\,000} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,19 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$L_1 = \frac{1}{2 \cdot f} \cdot v_0 \Leftrightarrow f = \frac{1}{2 \cdot L_1} \cdot v_0 = \frac{1}{2 \cdot 0,10925} \cdot 6,19 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 20 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 28,33 \text{ MHz}$$

$$v_{10} = \sqrt{10} \cdot v_0 = 19,5745 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \text{ Dies entspricht recht genau dem Simulationsergebnis}$$