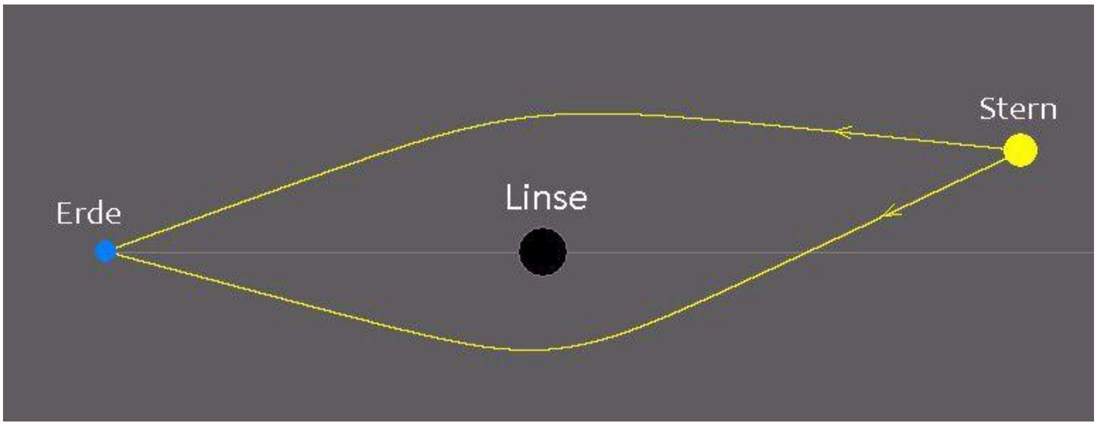
Gravitationslinsen und Einsteinradius

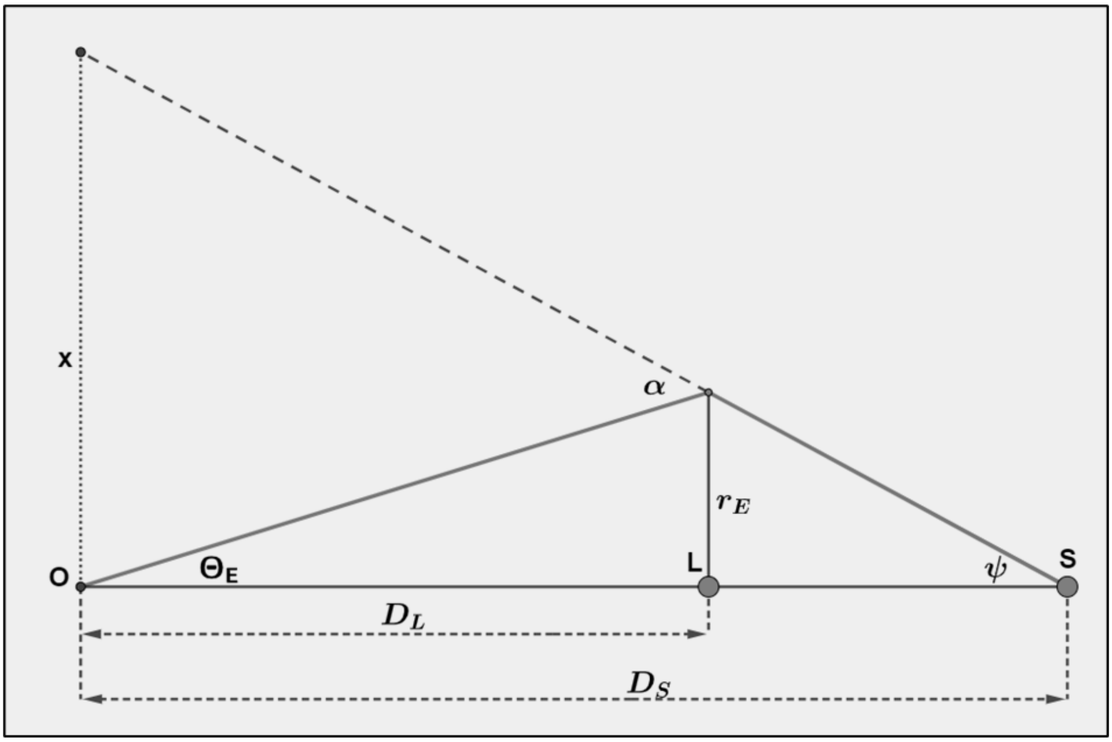
Herleitung der Linsengleichung

Matthias Borchardt

Liegen Beobachter, Linse und die Lichtquelle auf einer Linie, erscheint der Stern als heller Lichtring. Der Radius dieses Rings wird **Einsteinradius r_E** genannt, der Winkel, unter dem der Radius von der Erde aus gemessen wird, heißt **Einsteinwinkel** Θ_E . Viele Größen, die bei quantitativen Betrachtungen des Linseneffekts auftauchen, werden in den Einheiten des Einsteinradius bzw. Einsteinwinkels gemessen und angegeben.



Die obere Abbildung zeigt eine Situation, bei der die Linse gegenüber der Quelle etwas verschoben ist. Im Folgenden vereinfachen wir diese Abbildung, indem wir die Lichtwege als gerade Linien darstellen und die Linse zentral vor dem Stern positionieren.



Wir betrachten einen Lichtstrahl, der um den Winkel α_E abgelenkt wurde, sodass wir ihn auf der Erde wahrnehmen können. Für diesen Winkel liefert die **Allgemeine Relativitätstheorie** die Formel:

$$\boxed{\alpha_E = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{r_E \cdot c^2}}$$

wobei G die Gravitationskonstante und M_L die Masse der Linse sind.

Der Einsteinradius

Mithilfe des Winkels α_E und der Geometrie der Anordnung lassen sich Formeln für den Einsteinradius r_E und den Einsteinwinkel Θ_E herleiten:

Der Strahlensatz liefert: $\frac{x}{r_E} = \frac{D_S}{D_S - D_L} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{D_S}{D_S - D_L} \cdot r_E$.

Die Winkel in der Abbildung werden im Bogenmaß angegeben. Da die Winkel in der Realität extrem klein ausfallen, verwenden wir eine leichte Näherung. Es gilt: $\Theta_E = \frac{r_E}{D_L}$ und $\Psi = \frac{x}{D_S}$.

Der Außenwinkelsatz liefert: $\Theta_E + \Psi = \alpha_E \;\rightarrow\; \frac{r_E}{D_L} + \frac{x}{D_S} = \alpha_E$.

Wir setzen die Hilfsgröße x (Formel s.o.) ein und erhalten

$$\Theta_E + \Psi = \alpha_E \;\rightarrow\; \frac{r_E}{D_L} + \frac{D_S \cdot r_E}{(D_S - D_L) D_S} = \alpha_E .$$

Kürzen und ausklammern liefert $r_E \cdot \left(\frac{1}{D_L} + \frac{1}{D_S - D_L} \right) = \alpha_E$.

Mit $\alpha_E = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{r_E \cdot c^2}$ wird daraus: $r_E \cdot \left(\frac{1}{D_L} + \frac{1}{D_S - D_L} \right) = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{r_E \cdot c^2}$.

Die beiden Brüche in der Klammer fassen wir noch zusammen:

$$r_E \cdot \frac{D_S}{D_L \cdot (D_S - D_L)} = \frac{4 \cdot G \cdot M_L}{r_E \cdot c^2}$$

Aufgelöst nach r_E liefert dies die wichtige Formel für den **Einsteinradius**:

$$\boxed{r_E = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_L}{c^2} \cdot \frac{D_L \cdot (D_S - D_L)}{D_S}}}$$

Der **Einsteinwinkel** ergibt sich dann aus $\Theta_E = \frac{r_E}{D_L}$ zu $\Theta_E = \sqrt{\frac{4 \cdot G \cdot M_L}{c^2} \cdot \frac{(D_S - D_L)}{D_L \cdot D_S}}$