

# Energie und Impuls in der Speziellen Relativitätstheorie

Matthias Borchardt

Ein Elektron, das sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, hat einen Impuls und eine kinetische Energie. Wenn wir diese beiden Größen formelmäßig verknüpfen wollen, müssen wir allerdings unterscheiden, ob das Elektron sich mit großer oder mit kleiner Geschwindigkeit bewegt. Groß bedeutet in diesem Zusammenhang in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit.

## Aufgaben:

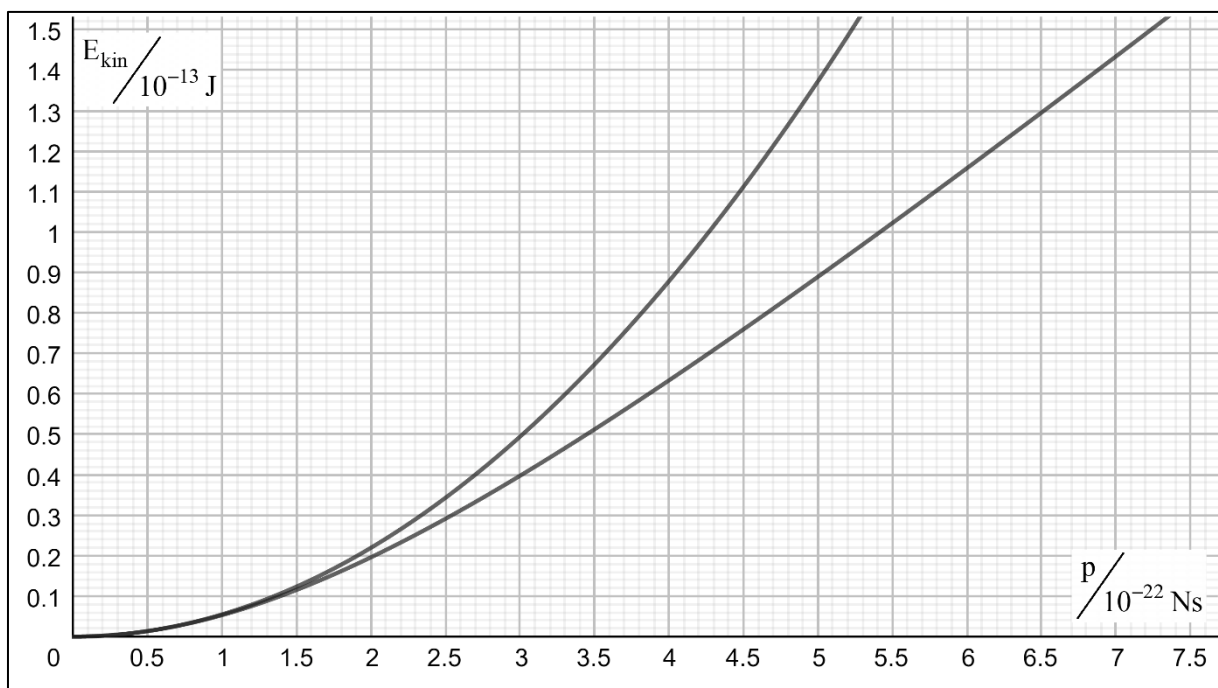
1) Leiten Sie die beiden Formeln her:

a) Klassisch gilt der Zusammenhang  $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2 \cdot m_0} = \frac{(p \cdot c)^2}{2 \cdot E_0}$ .

b) Aus den Formeln der Relativitätstheorie ergibt sich:  $E_{\text{kin}} = \sqrt{(p \cdot c)^2 + E_0^2} - E_0$ .

2) Das untere Diagramm stellt die beiden Versionen für die kinetische Energie als Funktion des Impulses  $p$  dar. Entscheiden Sie durch eine Rechnung, welche Kurve zu welcher Formel gehört und beschriften Sie dann die Kurven entsprechend.

Tipp: Wählen Sie einen Wert für den Impuls, beispielsweise  $p = 5 \cdot 10^{-22}$  Ns und berechnen Sie die kinetische Energie jeweils mit der ersten und zweiten Formel.

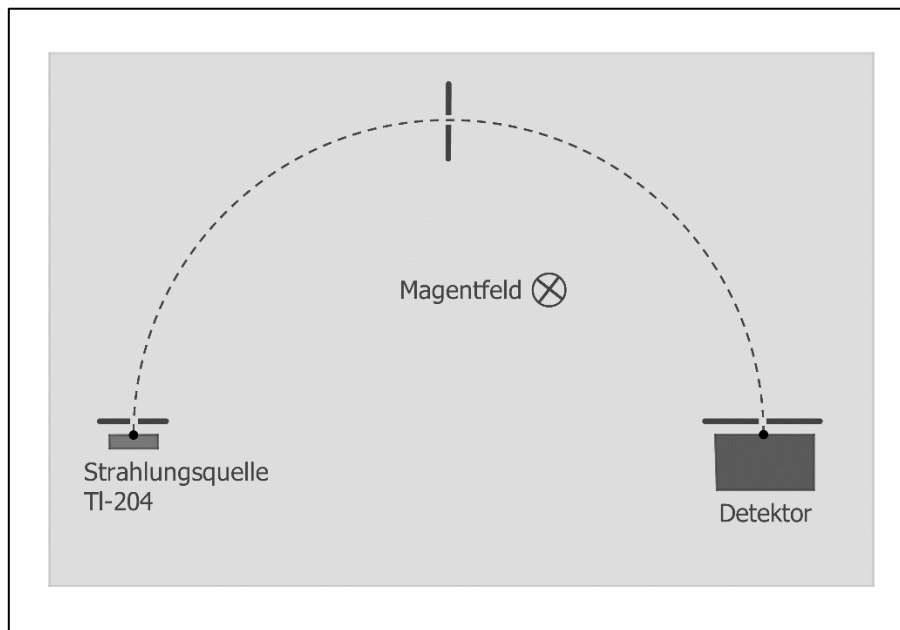


3) Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf einen Praktikumsversuch für Studierende der Physik<sup>1</sup>. Ziel des Experiments ist die Bestätigung der relativistischen Energie-Impulsbeziehung.

Als Strahlungsquelle wird das radioaktive Thallium-Isotop  $^{204}_{81}\text{Tl}$  verwendet - ein Betastrahler, der Elektronen in einem kontinuierlichen Energiespektrum mit einer maximalen kinetischen Energie von 763 keV abgibt. Die Elektronen durchlaufen innerhalb eines

<sup>1</sup> „Union-College“ im US-Staat New York

homogenen Magnetfeldes einen Halbkreis, bis sie in einen sog. Oberflächen-Sperrschicht Detektor gelangen, der in der Lage ist, ihre kinetische Energie zu messen. Durch Variation der magnetischen Flussdichte  $B$  ist es möglich, Elektronen unterschiedlicher Energien in den Detektor zu leiten.



- a) Mithilfe des Versuchsaufbaus lassen sich die Impulse der Elektronen bestimmen. Leiten Sie her: Der Impuls der Elektronen ist  $p = e \cdot B \cdot r$ .
- b) Der Radius der Teilchenbahn im Spektrometer beträgt  $r = 3,24$  cm. Die Tabelle listet einige Messwerte des Experiments auf, nämlich jeweils die eingestellte Magnetfeldstärke und die gemessene kinetische Energie der Elektronen. Berechnen Sie die Impulse der Elektronen und tragen Sie die Wertepaare aus Impuls und gemessener kinetischer Energie als Punkte in das obere Diagramm ein.

$B / \text{Tesla}$	$p / 10^{-22} \text{Ns}$	$E_{\text{kin}} / 10^{-13} \text{J}$
0,045		0,25
0,05		0,32
0,06		0,42
0,07		0,53
0,08		0,69
0,09		0,81
0,10		0,92
0,11		1,04
0,155		1,16

- 4) Äußern Sie sich zu der Frage, ob dieser Praktikumsversuch geeignet ist, die relativistische Verknüpfung von Impuls und Energie zu bestätigen.

## Lösungen:

1)

a) Klassisch:  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 = \frac{m_0^2 \cdot v^2}{2 \cdot m_0} = \frac{p^2}{2 \cdot m_0}$

b) Relativistisch: Es gilt:  $E_{\text{ges}} = E_0 + E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{ges}}^2 = E_0^2 + (p \cdot c)^2$

Aus der zweiten Formel ergibt sich:  $E_{\text{ges}} = \sqrt{E_0^2 + (p \cdot c)^2}$  und mit  $E_{\text{ges}} = E_0 + E_{\text{kin}}$

dann:  $E_{\text{kin}} = \sqrt{(p \cdot c)^2 + E_0^2} - E_0$ .

2) Beispiel:  $p = 5 \cdot 10^{-22} \text{ Ns}$

Klassisch:  $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2 \cdot m_0} = \frac{(5 \cdot 10^{-22})^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}} \text{ J} = 1,372 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ , liegt auf der Kurve 1.

Relativistisch:  $E_{\text{kin}} = \sqrt{(p \cdot c)^2 + E_0^2} - E_0$

$$= \sqrt{(5 \cdot 10^{-22} \cdot 3 \cdot 10^8)^2 + (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2)} \text{ J} - 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ J}$$

$$= 0,89 \cdot 10^{-13} \text{ J}, \text{ liegt auf der Kurve 2.}$$

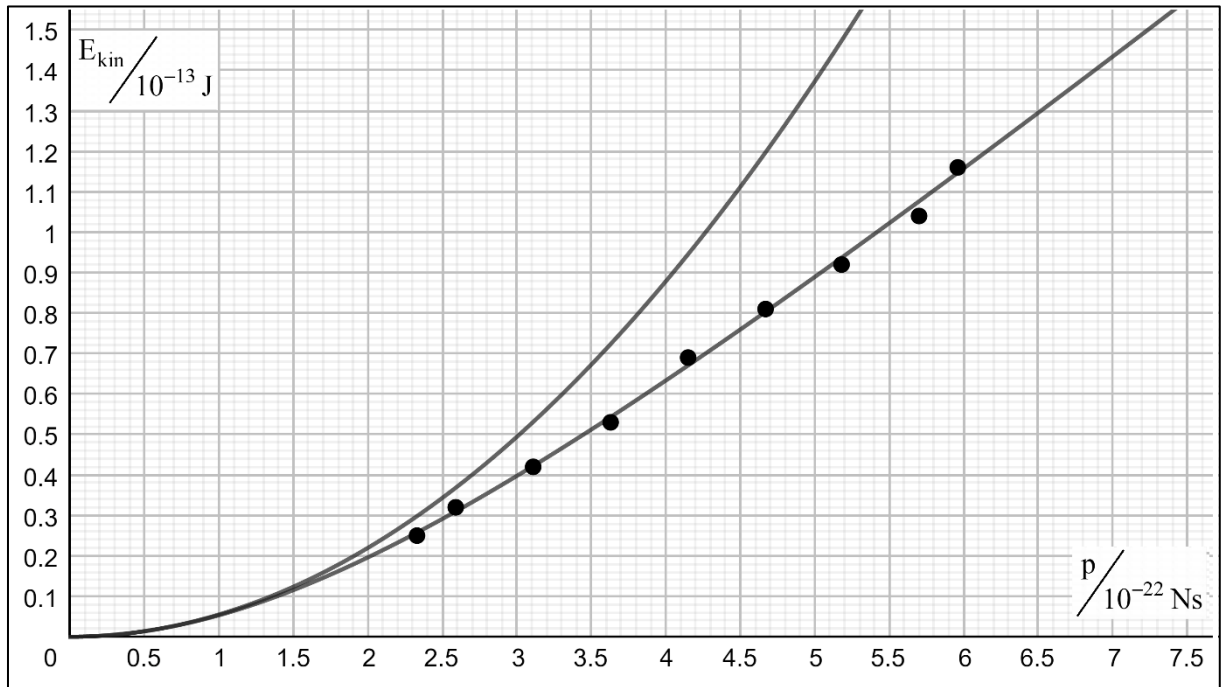
3)

a) Im Magnetfeld wirkt die Lorentzkraft als Zentripetalkraft:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B \Leftrightarrow \frac{m \cdot v}{r} = e \cdot B \Leftrightarrow m \cdot v = e \cdot B \cdot r, \text{ also } p = e \cdot B \cdot r.$$

b) Mit dem festen Radius  $r = 0,0324 \text{ m}$  ergeben sich die folgenden Impulswerte:

B / Tesla	p / $10^{-22} \text{ Ns}$	$E_{\text{kin}} / 10^{-13} \text{ J}$
0,045	2,34	0,25
0,05	2,60	0,32
0,06	3,11	0,42
0,07	3,63	0,53
0,08	4,15	0,69
0,09	4,67	0,81
0,10	5,19	0,92
0,11	5,71	1,04
0,155	8,05	1,16



- 4) Die Messwerte reihen sich alle sehr gut um die Kurve, welche die relativistische Energie-Impuls Beziehung beschreibt. Je größer der Impuls das Elektron wird, desto deutlicher weicht die Vorhersage der klassischen Physik von der Relativitätstheorie ab.