Christiaan Huygens (1629 - 1695) war ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker. Er war einer der bedeutsamsten Wissenschaftler seiner Zeit.

Seine Abhandlung über die **Zentrifugalkraft** *(„Tractatum de vi centrifuga“)* wurde erst 1703, also nach seinem Tode, veröffentlicht. Eine deutsche Übersetzung dieses Werkes wurde 1903 von dem Mathematiker **Felix Hausdorff** herausgegeben[1]. Insgesamt hat Huygens 17 Lehrsätze zur Kreisbewegung formuliert und bewiesen. Im Folgenden werden zwölf dieser Sätze vorgestellt.

Abgesehen von Lehrsatz VII eignen sich diese Lehrsätze durchaus für eine Behandlung im Mechanikunterricht der Oberstufe, denn sie lassen sich mit den Formeln, die im Unterricht erarbeitet wurden, Schritt für Schritt beweisen. Somit ergeben sich didaktisch wertvolle Verknüpfungen der verschiedenen Themenbereiche der Mechanik. An die etwas altertümliche Sprache und Rechtschreibung der historischen Texte muss man sich allerdings zunächst gewöhnen. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass Huygens, dem damaligen Verständnis und Sprachgebrauch folgend, stets von *Zentrifugalkraft* spricht und nicht von *Zentripetalkraft* oder *Radialkraft*. Darauf sollte im Unterricht nachdrücklich eingegangen werden, um Fehlvorstellungen zu vermeiden. Mögliche Beweise der Lehrsätze sind im Anhang aufgeführt. Dabei kommen die folgenden **Formeln** zum Einsatz:

- Die Zentripetalkraft (Zentrifugalkraft) taucht in drei verschieden Versionen auf, je nachdem, ob die *Winkelgeschwindigkeit*, die *Bahngeschwindigkeit* oder die *Umlaufdauer* relevant sind: $F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$ $\quad F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$ $\quad F_Z = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$

  Die Zusammenhänge lassen sich durch $v = \omega \cdot r$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ oder $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ darstellen.

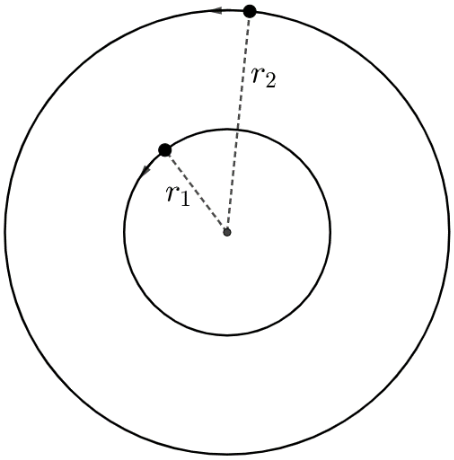
- Außerdem der Energieerhaltungssatz und die Formeln für die kinetische und potentielle Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ und $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$
- Des Weiteren die Schwingungsdauer eines Fadenpendels: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$.
- Die vektorielle Zerlegung bzw. Addition von Kräften (Kräfteparallelogramme) sind ebenfalls Bestandteil einiger Herleitungen.

Matthias Borchardt,
im November 2023

[1] Felix Hausdorff, Gesammelte Werke Band V, Astronomie, Optik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

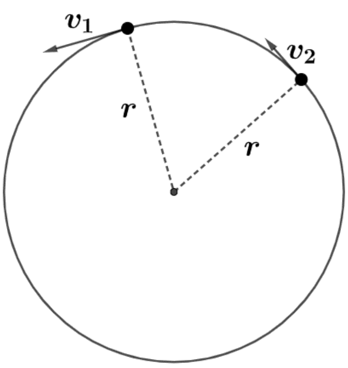
Lehrsatz I.

Wenn zwei gleiche Körper in gleichen Zeiten ungleiche Kreisumfänge durchlaufen, so verhält sich die Centrifugalkraft auf dem grösseren Kreise zu derjenigen auf dem kleineren, wie sich die Kreisumfänge oder ihre Durchmesser zu einander verhalten.



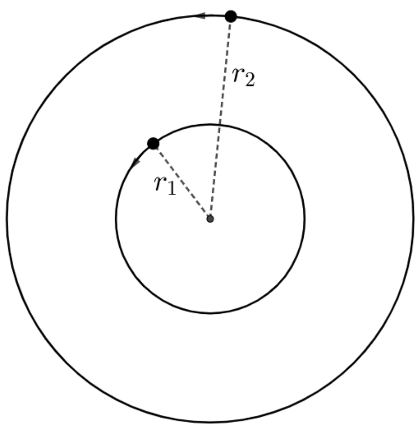
Lehrsatz II.

Wenn gleiche bewegliche Körper auf demselben oder auf gleichen Kreisen oder Rädern mit ungleichen Geschwindigkeiten rotiren, jedoch jeder mit gleichförmiger Bewegung, so verhält sich die Kraft des schnelleren, sich vom Mittelpunkte zu entfernen, zur Kraft des langsameren, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.



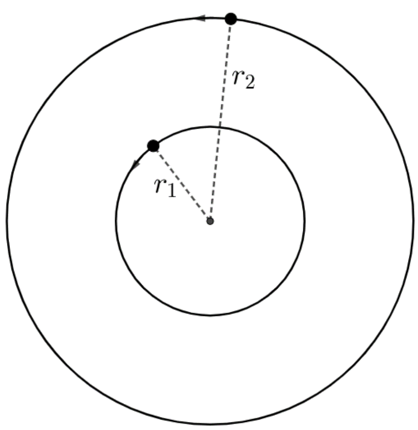
Lehrsatz III.

Wenn zwei gleiche Körper auf ungleichen Kreisen mit gleicher Geschwindigkeit rotiren, so verhalten sich ihre Centrifugalkräfte umgekehrt wie die Durchmesser, so dass auf dem kleineren Kreise die besagte Kraft grösser ist.



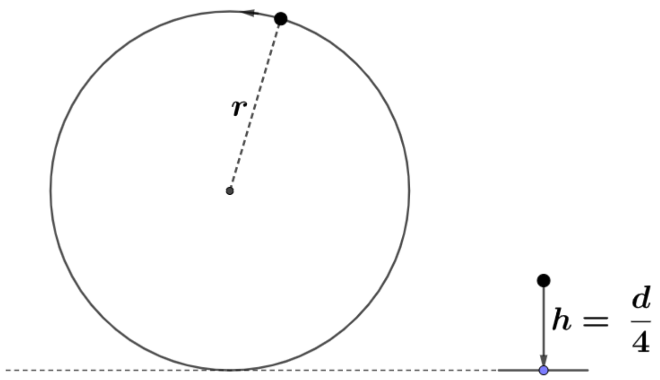
Lehrsatz IV.

Wenn zwei gleiche auf ungleichen Kreisen rotirende Körper gleiche Centrifugalkraft haben, so verhält sich die Umlaufzeit auf dem grösseren Kreise zur Umlaufzeit auf den kleineren wie die Quadratwurzeln aus den Durchmessern.



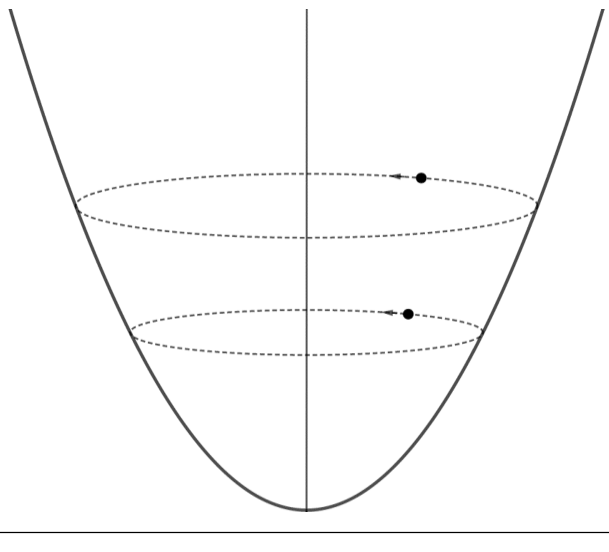
Lehrsatz V.

Wenn ein Körper auf einem Kreisumfang mit derjenigen Geschwindigkeit umläuft, welche er durch den Fall erwirbt aus der Höhe, welche dem vierten Theile des Durchmessers gleich ist, so hat er eine seiner Schwere gleiche Centrifugalkraft, d.h. er zieht an dem Faden, der ihn hält, ebenso heftig, als ob er an ihm herabhinge.



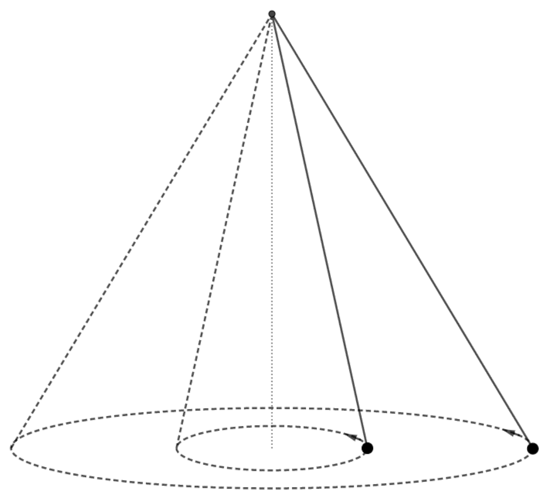
Lehrsatz VII.

Auf der gekrümmten Oberfläche eines Rotationsparaboloids, dessen Axe senkrecht steht, geschehen alle Umläufe eines die horizontalen Parallelkreise durcheilenden Körpers, die grossen wie die kleinen, in gleichen Zeiten. Diese Umlaufzeit ist gleich der von zwei Schwingungen eines Pendels von der Länge des halben Parameters der erzeugten Parabel.



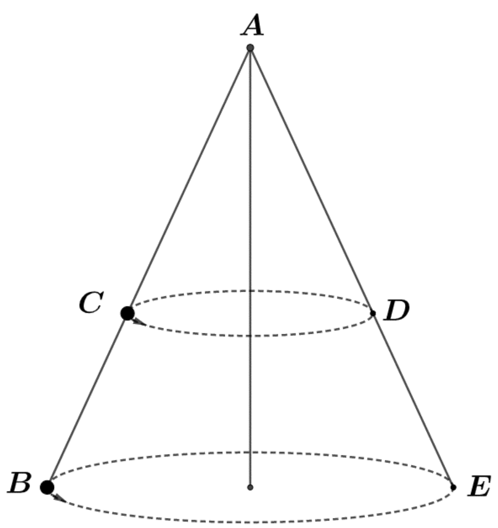
Lehrsatz VIII.

Wenn zwei bewegliche an ungleichen Fäden aufgehängte Körper so rotiren, dass sie horizontale Kreisperipherien durchlaufen, wobei das eine Fadenende unbewegt bleibt, und wenn die Axen oder Höhen der Kegel, deren Mäntel die Fäden durch diese Bewegung beschreiben gleich sind, so sind auch die Zeiten, in denen jeder der Körper seinen Umlauf beendigt, gleich.



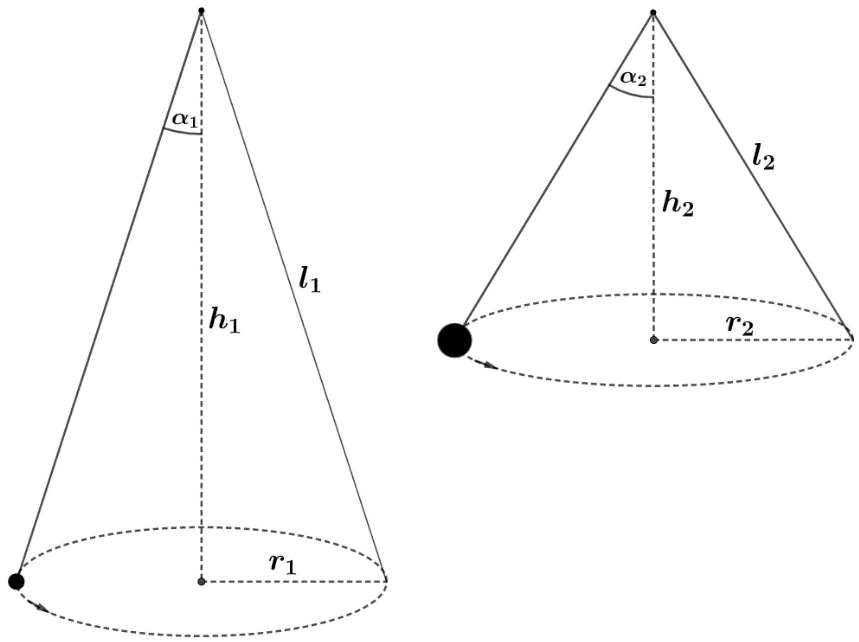
Lehrsatz IX.

Die Zeiten des Umlaufes durch die horizontalen Kreise CD und BE verhalten sich bei demselben Rotationswinkel CAD wie die Quadratwurzeln aus den Fadenlängen AC und AB.



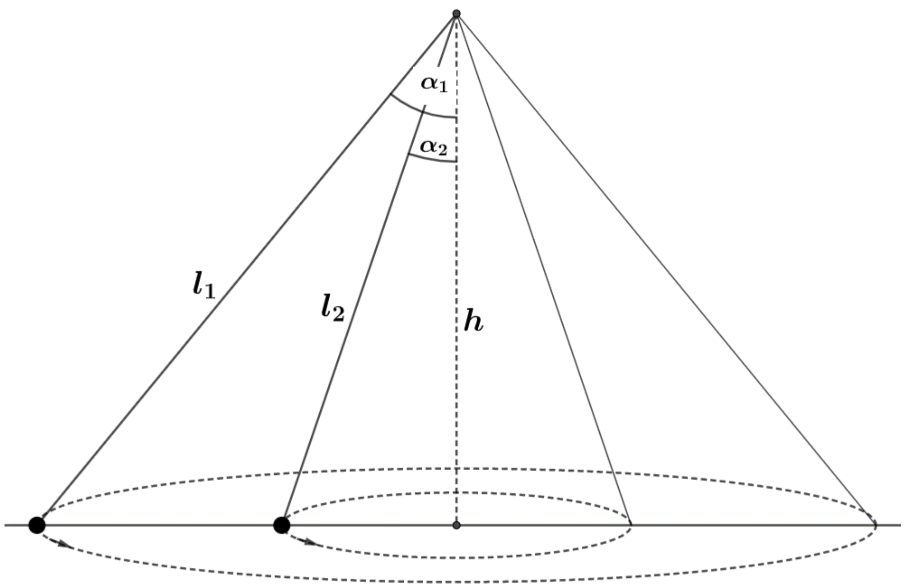
Lehrsatz X.

Wenn zwei Körper von beliebiger Größe an Fäden hängend horizontale Kreise beschreiben, so verhalten sich die Umlaufszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Höhen der Kegel, deren Mäntel von den Fäden beschrieben werden.



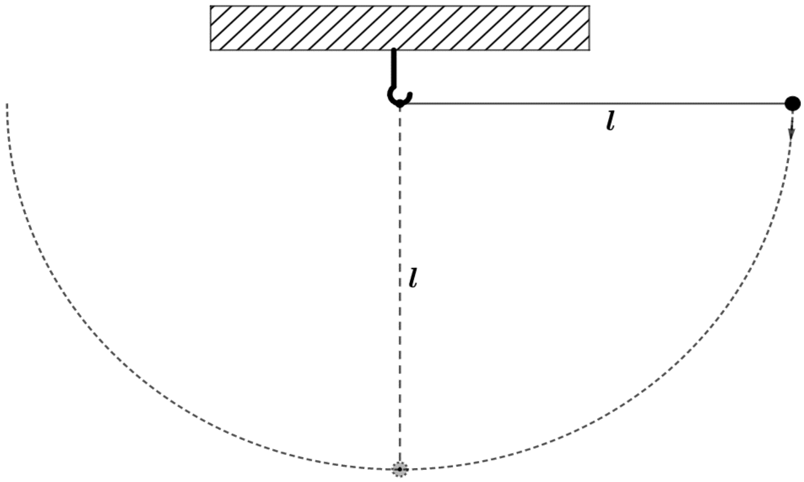
Lehrsatz XV.

Wenn zwei Pendel von gleichem Gewichte, aber ungleichen Fadenlängen, sich kegelförmig bewegen, und wenn die Höhen der Kegel gleich sind, so verhalten sich die Kräfte, mit denen sie ihre Fäden spannen, wie die Fadenlängen.



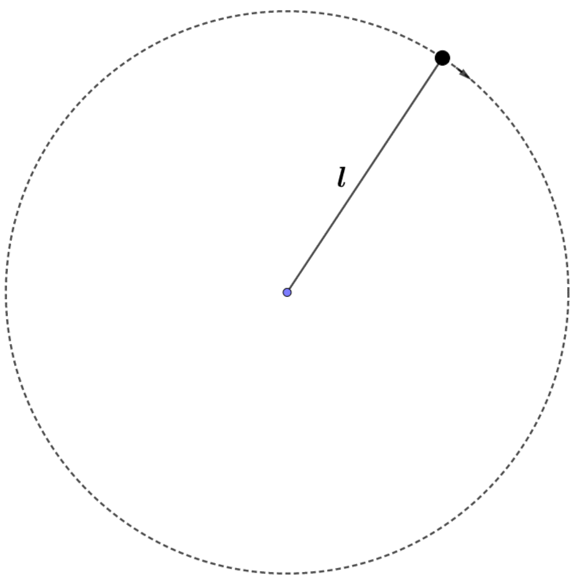
Lehrsatz XVI.

Wenn ein einfaches Pendel die grösste seitliche Schwingung vollführt, d.h. wenn es durch den ganzen Quadranten des Kreises fällt, so zieht es bei der Ankunft im untersten Punkte des Kreises mit dreifach grösserer Kraft an seinem Faden, als wenn es ruhend an ihm aufgehängt wäre.



Lehrsatz XVII.

Ein vom Mittelpunkte eines vertical stehenden Kreises an einem Faden herabhängende Kugel vermag auf der Peripherie jenes Kreises nicht zu rotiren, falls nicht der Faden das Sechsfache des angehängten Gewichtes zu tragen im Stande ist.



Beweise:

Lehrsatz I

„…in gleichen Zeiten“ bedeutet, dass sich beide Körper mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit bewegen.

$$\begin{aligned} F_1 &= m\cdot\omega^2\cdot r_1 \\ F_2 &= m\cdot\omega^2\cdot r_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot r_1}{m\cdot\omega^2\cdot r_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2\cdot r_1}{2\cdot r_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\pi\cdot d_1}{\pi\cdot d_2} = \frac{U_1}{U_2}$$

Also: $\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{U_1}{U_2}}$

q.e.d.

Lehrsatz II

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{m\cdot v_1^2}{r} \\ F_2 &= \frac{m\cdot v_2^2}{r} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{m\cdot v_1^2}{r}}{\frac{m\cdot v_2^2}{r}} = \frac{m\cdot v_1^2\cdot r}{r\cdot m\cdot v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

Also: $\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}}$

q.e.d.

Lehrsatz III

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{m\cdot v^2}{r_1} \\ F_2 &= \frac{m\cdot v^2}{r_2} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{m\cdot v^2}{r_1}}{\frac{m\cdot v^2}{r_2}} = \frac{m\cdot v^2\cdot r_2}{r_1\cdot m\cdot v^2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2\cdot r_2}{2\cdot r_1} = \frac{d_2}{d_1}$$

Also: $\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}}$

q.e.d.

Lehrsatz IV

$F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$ ergibt mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Formel: $F_Z = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$

$$F_Z = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r_1}{T_1^2} \qquad F_Z = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r_2}{T_2^2} \rightarrow \frac{F_Z}{F_Z} = \frac{\frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r_1}{T_1^2}}{\frac{4\pi^2 \cdot m \cdot r_2}{T_2^2}} = \frac{T_2^2 \cdot 4\pi^2 \cdot m \cdot r_1}{T_1^2 \cdot 4\pi^2 \cdot m \cdot r_2} = \frac{T_2^2 \cdot r_1}{T_1^2 \cdot r_2} \Leftrightarrow 1 = \frac{T_2^2 \cdot r_1}{T_1^2 \cdot r_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}} = \frac{\sqrt{2 \cdot r_2}}{\sqrt{2 \cdot r_1}} = \frac{\sqrt{d_2}}{\sqrt{d_1}}$$

Also: $\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{d_2}}{\sqrt{d_1}}}$

q.e.d.

Lehrsatz V

Freier Fall aus der Höhe, die dem vierten Teil des Durchmessers entspricht, bedeutet:

Fallhöhe: $h = \frac{r}{2}$

Die Auftreffgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Energiesatz: $E_{kin} = E_{pot}$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \Leftrightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{r}{2}} = \sqrt{g \cdot r}\ .$$

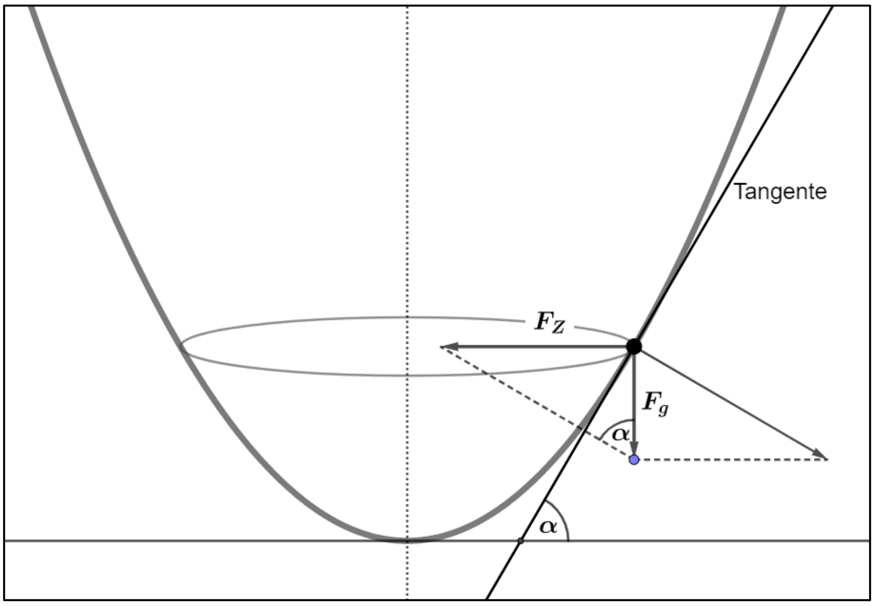
Einsetzen in die Formel für die Zentripetalkraft ergibt:

Zentripetalkraft:

$$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{m \cdot g \cdot r}{r} = m \cdot g$$

Ergebnis: Wenn die Masse mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{r \cdot g}$ auf der Kreisbahn läuft, dann entspricht die Zentripetalkraft („Zentrifugalkraft") der Gewichtskraft der Masse, also $F_Z = m \cdot g$

Lehrsatz VII



Parabelgleichung: $f(x) = a \cdot x^2$

Die Steigung der Tangente an der Stelle x = r ist: $m = f'(r) = 2 \cdot a \cdot r$

Außerdem gilt für den Winkel α, unter dem die Tangente die x-Achse schneidet: $\tan(\alpha) = m$

Somit ergibt sich: $\tan(\alpha) = 2 \cdot a \cdot r$

Aus dem **Kräfteparallelogramm** ergibt sich:

$$\tan(\alpha) = \frac{F_Z}{F_g} \quad \Leftrightarrow \quad F_Z = F_g \cdot \tan(\alpha)$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot g \cdot \tan(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^2 = \frac{g \cdot \tan(\alpha)}{r}$$

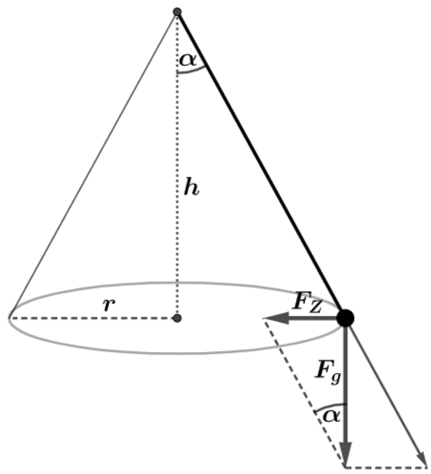
Wir setzen $\tan(\alpha) = 2 \cdot a \cdot r$ dort ein und erhalten: $\omega^2 = \frac{g \cdot 2 \cdot a \cdot r}{r} = 2 \cdot g \cdot a$

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{2 \cdot g \cdot a}$ ist also unabhängig vom Radius r der Kreisbahn, also unabhängig davon, in welcher Höhe die Kugel auf der Paraboloidfläche umläuft. Die Umlaufzeiten sind also überall gleich und ergeben sich mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ zu $\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{2 \cdot a \cdot g}}}$

Für die **Schwingungsdauer eines Pendels** gilt: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$, wobei die Länge L dem Halbparameter p der Parabel entsprechen soll: $L = p = \frac{1}{2 \cdot a}$. Eingesetzt in die Schwingungsformel ergibt $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot a \cdot g}} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{2 \cdot a \cdot g}}}$.

Dies entspricht der Umlaufzeit der Kugel auf dem Paraboloid

Lehrsatz VIII



$$\tan(\alpha) = \frac{F_Z}{F_g} \quad \rightarrow \quad F_Z = m \cdot g \cdot \tan(\alpha) \text{ und } \tan(\alpha) = \frac{r}{h}$$

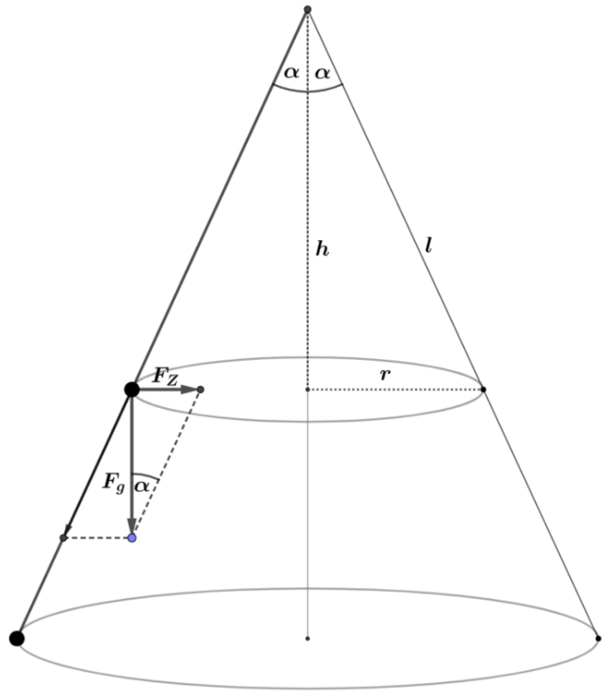
Und daher: $F_Z = \frac{m \cdot g \cdot r}{h}$

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{m \cdot g \cdot r}{h}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist also unabhängig von r oder der Länge L des Pendels und somit benötigen zwei Kugeln, die auf verschiedenen Radien aber gleicher Höhe umlaufen, die gleiche Umlaufzeit.

Lehrsatz IX



$$\tan(\alpha) = \frac{F_Z}{F_g}$$

$$F_1 = m \cdot g \cdot \tan(\alpha) = m \cdot \omega_1^2 \cdot r_1$$
$$F_2 = m \cdot g \cdot \tan(\alpha) = m \cdot \omega_2^2 \cdot r_2$$

Die Zentrifugalkräfte sind für beide Kugeln gleich, daher:

$$F_1 = F_2$$
$$m \cdot \omega_1^2 \cdot r_1 = m \cdot \omega_2^2 \cdot r_2$$
$$\omega_1^2 \cdot r_1 = \omega_2^2 \cdot r_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Und mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ergibt sich $\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$

Aus der Geometrie der Anordnung ergibt sich der Zusammenhang: $r = L \cdot \sin(\alpha)$

Einsetzen: $\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{L_2 \cdot \sin(\alpha)}{L_1 \cdot \sin(\alpha)} = \frac{L_2}{L_1}$

Und somit:

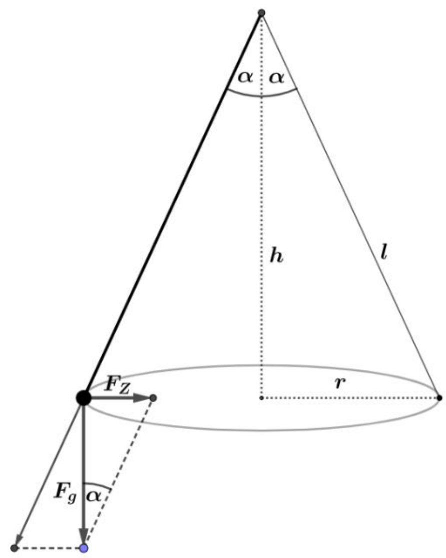
$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}}}$$

q.e.d.

Lehrsatz X

Das Kräfteparallelogramm ergibt:

$F_1 = m \cdot g \cdot \tan(\alpha_1)$ und $F_2 = m \cdot g \cdot \tan(\alpha_2)$



Aus der Geometrie der Anordnungen ergibt sich:

$\tan(\alpha_1) = \frac{r_1}{h_1}$ und $\tan(\alpha_2) = \frac{r_2}{h_2}$

Einsetzen:

$$F_1 = \frac{m \cdot g \cdot r_1}{h_1} \qquad F_2 = \frac{m \cdot g \cdot r_2}{h_2}$$

$$m \cdot \omega_1^2 \cdot r_1 = \frac{m \cdot g \cdot r_1}{h_1} \qquad m \cdot \omega_2^2 \cdot r_2 = \frac{m \cdot g \cdot r_2}{h_2}$$

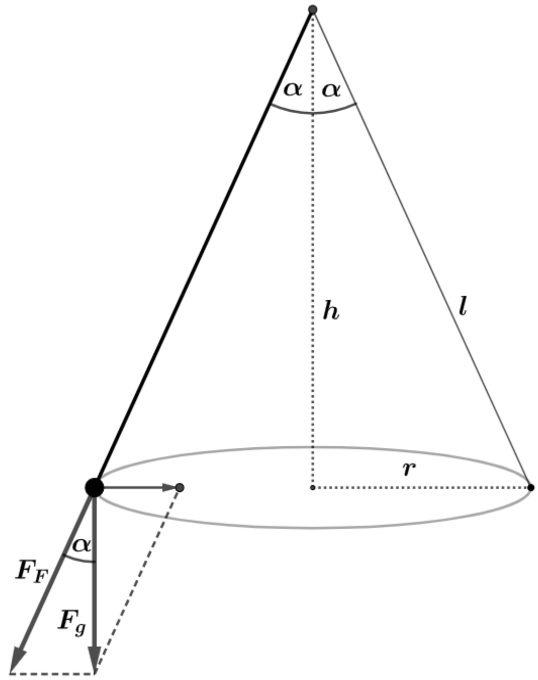
$$\omega_1^2 = \frac{g}{h_1} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{h_2}$$

$$\rightarrow \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{h_2}{h_1} \quad \rightarrow \frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{h_2}{h_1}$$

Und somit: $\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}}}$

q.e.d.

Lehrsatz XV



Für die Kraft, die auf den Faden wirkt, ergibt das Kräfteparallelogramm: $\cos(\alpha) = \frac{F_g}{F_F}$

$$\Leftrightarrow F_F = \frac{F_g}{\cos(\alpha)}$$

Für die beiden Kugeln gilt daher:

$F_{F1} = \frac{m \cdot g}{\cos(\alpha_1)}$ und $F_{F2} = \frac{m \cdot g}{\cos(\alpha_2)}$

Die Geometrie der Anordnung liefert:

$\cos(\alpha_1) = \frac{h}{L_1}$ und $\cos(\alpha_2) = \frac{h}{L_2}$

Eingesetzt:

$F_{F1} = \frac{m \cdot g \cdot L_1}{h}$ und $F_{F2} = \frac{m \cdot g \cdot L_2}{h}$

Das Verhältnis der Kräfte: $\frac{F_{F1}}{F_{F2}} = \frac{\frac{m \cdot g \cdot L_1}{h}}{\frac{m \cdot g \cdot L_2}{h}} = \frac{L_1}{L_2}$

Ergebnis: $\boxed{\frac{F_{F1}}{F_{F2}} = \frac{L_1}{L_2}}$

q.e.d.

Lehrsatz XVI

Für die Geschwindigkeit im Tiefpunkt v_T ergibt der Energiesatz:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_T^2 = m \cdot g \cdot L \quad \Leftrightarrow \quad v_T^2 = 2 \cdot g \cdot L$$

Damit:

$$F_Z = \frac{m \cdot v_T^2}{L} = \frac{m \cdot 2 \cdot g \cdot L}{L} = 2 \cdot m \cdot g$$

Die Kraft, mit der der Faden im Tiefpunkt belastet wird ergibt sich aus:

$$F_{Tief} = F_Z + F_g = 2 \cdot m \cdot g + m \cdot g = 3 \cdot m \cdot g$$

Also wir der Faden dort mit dem Dreifachen der Gewichtskraft belastet.

$$\boxed{F_{Tief} = 3 \cdot m \cdot g}$$

Lehrsatz XVII

Der Hochpunkt kann gerade noch vollständig durchlaufen werden, wenn dort die für die Kreisbahn notwendige Zentripetalkraft allein durch die Gewichtskraft der Kugel aufgebracht wird. Also gilt dort: $F_H = F_g \quad \rightarrow \quad \frac{m \cdot v_H^2}{L} = m \cdot g \quad \Leftrightarrow \quad v_H^2 = g \cdot L$

Für die Geschwindigkeit im Tiefpunkt v_T ergibt der Energiesatz:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_T^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_H^2 + m \cdot g \cdot (2 \cdot L) \quad \Leftrightarrow \quad v_T^2 = v_H^2 + 4 \cdot g \cdot L$$

$$= g \cdot L + 4 \cdot g \cdot L = 5 \cdot g \cdot L$$

Damit:

$$F_Z = \frac{m \cdot v_T^2}{L} = \frac{m \cdot 5 \cdot g \cdot L}{L} = 5 \cdot m \cdot g$$

Die Kraft, mit der der Faden im Tiefpunkt belastet wird ergibt sich aus:

$$F_{Tief} = F_Z + F_g = 5 \cdot m \cdot g + m \cdot g = 6 \cdot m \cdot g$$

Also wir der Faden dort mit dem Sechsfachen der Gewichtskraft belastet.

$$\boxed{F_{Tief} = 6 \cdot m \cdot g}$$

Matthias Borchardt
Tannenbusch-Gymnasium Bonn
https://mabo-physik.de