

Wie rotiert eine Spiralgalaxie?

Matthias Borchardt



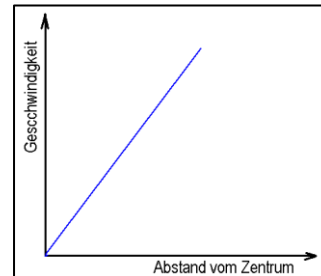
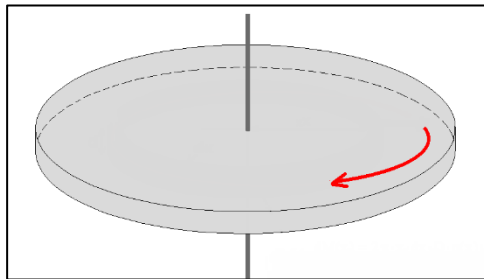
ESA/Hubble



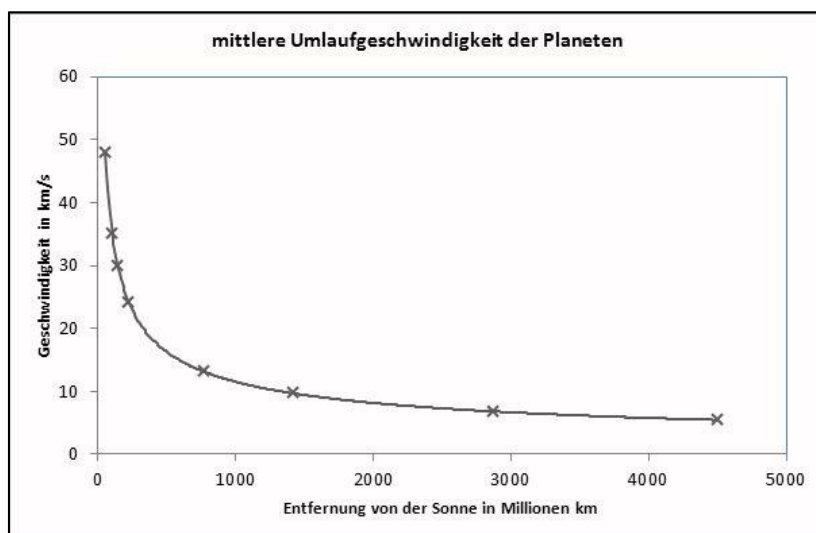
Adam Block/Mount Lemmon SkyCenter

Einleitung

Rotiert eine Spiralgalaxie wie eine starre Scheibe? Dann müssten die Rotationsgeschwindigkeiten mit zunehmender Entfernung vom Zentrum wachsen.



Oder rotiert sie eher wie die Planeten um die Sonne? Dann müsste die Rotationsgeschwindigkeit mit zunehmendem Abstand vom Zentrum abnehmen (Keplerrotation).



Die erste Idee scheint wenig realistisch, denn die Stern- Gas- und Staubmassen innerhalb der Galaxienscheibe sind zwar gravitativ miteinander verbunden – aber vor allem weiter außen sehr locker, sodass von einer mechanisch starren Verbindung keinesfalls die Rede sein kann.

Die zweite Idee scheint ebenfalls wenig brauchbar zu sein, denn die Annahme einer großen, fest definierten Zentralmasse trifft für eine Galaxie nicht zu. Je nachdem, wie weit ein Objekt vom Zentrum der Galaxie entfernt ist, spürt es die Gravitation unterschiedlicher Massenkonzentrationen um sich herum. Die Materie innerhalb der Scheibe einer Spiralgalaxie ist nämlich nicht gleichmäßig verteilt. Im Bereich des Zentrums ist die Materiedichte sehr hoch, weiter außen nimmt sie stark ab. Um das Rotationsverhalten der Galaxienscheibe zu verstehen, ist es daher wichtig, sich zunächst die **Verteilung der Galaxienmasse** genauer anzusehen.

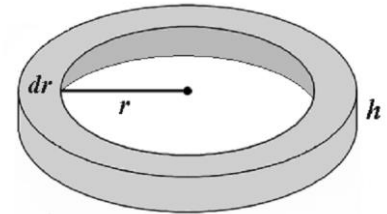
Die Massenverteilung

Die Dichteverteilung innerhalb der **Galaxienscheibe** lässt sich in guter Näherung durch eine fallende Exponentialfunktion der Form $\rho(r) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{r}{a}}$ beschreiben, wobei **a** die Skalenlänge der Verteilung darstellt (der Abstand, bei dem die Dichte auf $1/e$ des Anfangswerts gefallen ist).

Die Galaxie soll als Scheibe der mittleren Dicke **h** beschrieben werden: Die Scheibe zerlegen wir in Zylinderringe der Breite **dr**. Für das Volumen eines solchen Rings gilt: $dV \approx 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot h$.

Die Masse eines Rings ergibt sich dann zu

$$dM = \rho(r) \cdot dV = \rho_0 \cdot e^{-\frac{r}{a}} \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot h.$$



Also: $dM = 2\pi \cdot \rho_0 \cdot h \cdot r \cdot e^{-\frac{r}{a}} \cdot dr$

Die gesamte Masse innerhalb des Radius r erhalten wir durch Integration:

$$M(r) = \int_0^r dM(x) dx = 2\pi \cdot \rho_0 \cdot h \cdot \int_0^r x \cdot e^{-\frac{x}{a}} dx$$

Das Integral lässt sich durch partielle Integration lösen:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-\frac{x}{a}} dx &= -x \cdot a \cdot e^{-\frac{x}{a}} + a \cdot \int e^{-\frac{x}{a}} dx \\ &= -x \cdot a \cdot e^{-\frac{x}{a}} - a^2 \cdot e^{-\frac{x}{a}} = a \cdot e^{-\frac{x}{a}} (-x - a) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir: $M(r) = 2\pi \cdot \rho_0 \cdot h \cdot a \cdot \left[e^{-\frac{x}{a}} (-x - a) \right]_0^r = 2\pi \cdot \rho_0 \cdot h \cdot a \cdot \left(e^{-\frac{r}{a}} (-r - a) + a \right)$

Wir verwenden anstelle der Volumendichte die Flächenmassendichte Σ , für die gilt $\Sigma_0 = \rho_0 \cdot h$

und erhalten: $M(r) = 2\pi \cdot \Sigma_0 \cdot a \cdot \left(a - (r+a) \cdot e^{-\frac{r}{a}} \right)$.

Die Gesamtmasse der Galaxienscheibe erhalten wir, wenn wir r gegen Unendlich laufen lassen:

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(2\pi \cdot \Sigma_0 \cdot a \cdot \left(a - (r+a) \cdot e^{-\frac{r}{a}} \right) \right) = 2\pi \cdot \Sigma_0 \cdot a^2, \text{ also } M = 2\pi \cdot \Sigma_0 \cdot a^2.$$

Ein Beispiel:

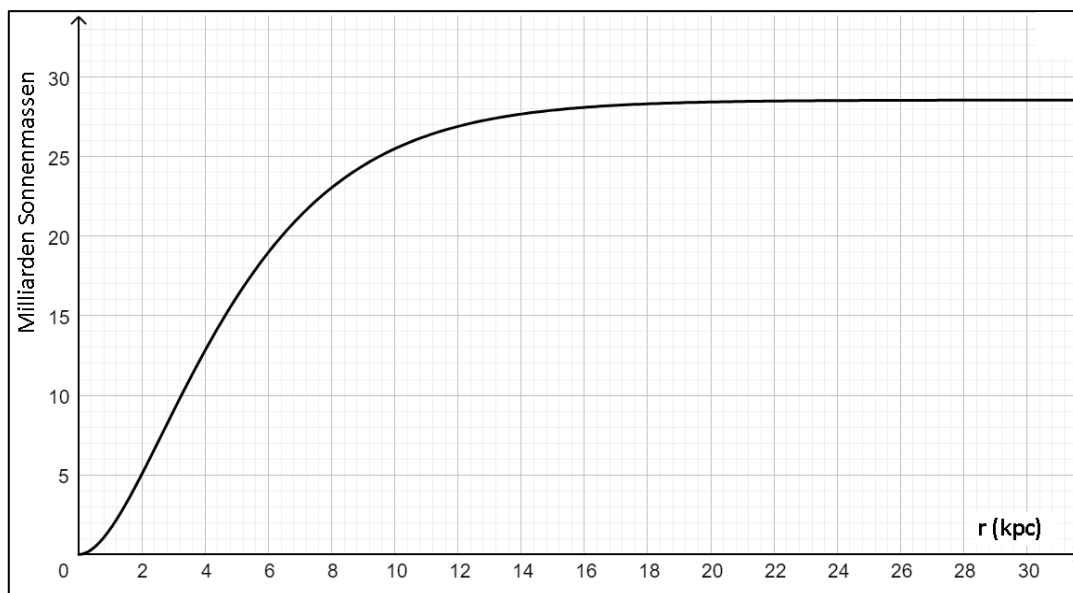
Für die Spiralgalaxie **NGC 3198** konnten die folgenden Werte aus den Beobachtungsdaten ermittelt werden: Eine Flächenmassendichte von $\Sigma_0 = 1,38 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 1,314 \cdot 10^{39} \frac{\text{kg}}{(\text{kpc})^2}$ und eine

Skalenlänge von $a = 2,63 \text{ kpc}$. Damit erhalten wir die Funktion, welche die Masse innerhalb eines Radius r beschreibt:

$$M(r) = \frac{2\pi \cdot 1,314 \cdot 10^{39} \cdot 2,63 \cdot \left(2,63 - (r+2,63) \cdot e^{-\frac{r}{2,63}} \right)}{2 \cdot 10^{39}} \text{ mit } \mathbf{M} \text{ in Milliarden Sonnenmassen}$$

und alle Abstände in Kiloparsecs.

Es ergibt sich der folgende Verlauf der Masse in Abhängigkeit vom Abstand r zum Galaxienzentrum:



Für die Gesamtmasse der Galaxie ergibt sich:

$$M = 2\pi \cdot \Sigma_0 \cdot a^2 = \frac{2\pi \cdot 1,314 \cdot 10^{39} \cdot (2,63)^2}{2 \cdot 10^{39}} = 28,6 \text{ Milliarden Sonnenmassen}$$

Die Rotationsgeschwindigkeiten der Galaxie

Die Theorie:

Die Umlaufgeschwindigkeit einer Masse m in einem Zweikörper-System wird durch die Gravitationskraft der Zentralmasse M bestimmt. Es gilt der Ansatz:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Diesen Ansatz könnte man nun auch für eine Probemasse m innerhalb der Scheibe einer Spiralgalaxie anwenden und würde $v = \sqrt{\frac{G \cdot M(r)}{r}}$ erhalten, wobei $M(r)$ die bis zum Radius r eingeschlossene Masse darstellt.

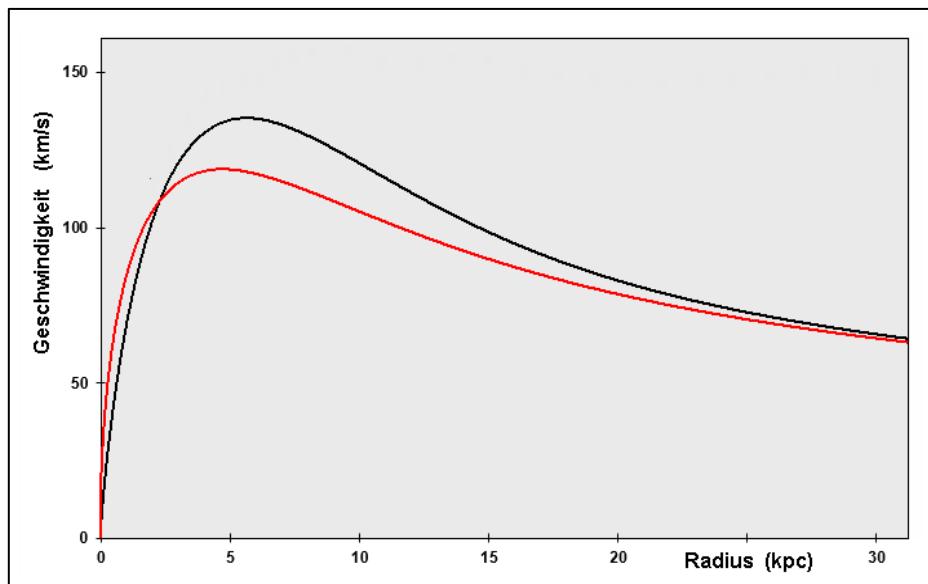
Leider liefert dieser Ansatz eine Kurve, welche die Rotationsgeschwindigkeiten der Galaxienscheibe nur sehr ungenau darstellt. In der unteren Abbildung (Daten der Galaxie NGC 3198) ist das die rote Kurve, während die schwarze (höhere) Kurve die richtige Entwicklung der Geschwindigkeiten zeigt. Die Abweichungen liegen darin begründet, dass für eine Scheibenstruktur das Newtonsche Schalentheorem nur bedingt anwendbar ist. Das Theorem gilt streng nämlich nur für kugelsymmetrische Massenverteilungen und es besagt dann: Eine Probemasse m befinde sich innerhalb kugelsymmetrischen Massenverteilung im Abstand r vom Zentrum der Kugel. Dann darf man sich die Massen innerhalb des Radius r im Zentrum der Kugel konzentriert vorstellen (Punktmasse), während die außen liegenden Massen für die Berechnung der Gravitationskraft keine Rolle spielen.

Die richtige Rotationskurve (im Diagramm die schwarze Kurve) ergibt sich durch mathematisch aufwändige Verfahren, die auf elementarem Niveau leider nicht mehr darstellbar sind. Das Ergebnis lautet:

$$v(r) = \sqrt{4\pi \cdot G \cdot \Sigma_0 \cdot a \cdot y^2 \cdot (I_0(y) \cdot K_0(y) - I_1(y) \cdot K_1(y))}$$
, wobei I_0, K_0, I_1, K_1 modifizierte Bessel-Funktionen erster und zweiter Art sind und $y = \frac{r}{2 \cdot a}$ gilt (Σ_0 - Anfangsflächendichte der Scheibe, a - Skalenlänge der Dichtefunktion).

Auch wenn sich beide Kurven unterscheiden, so zeigen sie doch ein ähnliches Verhalten: Die Rotationsgeschwindigkeit steigt vom Zentrum der Galaxie aus gesehen zunächst steil an, erreicht dann einen Hochpunkt und sinkt dann deutlich nach außen hin ab. Dort entsprechen die Umlaufgeschwindigkeiten denen einer typischen **Kepler-Rotation**, also einem

Kurvenverlauf, der durch $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ darstellbar ist. Mit wachsendem r sinken die Rotationsgeschwindigkeiten der Galaxienscheibe.



Dieses Verhalten der Rotationsgeschwindigkeiten wäre der **Theorie** nach also zu erwarten. **Messungen** der Umlaufgeschwindigkeiten von zahlreichen Spiralgalaxien zeigen jedoch ein völlig anderes Verhalten – die Geschwindigkeiten bleiben nach außen hin konstant.

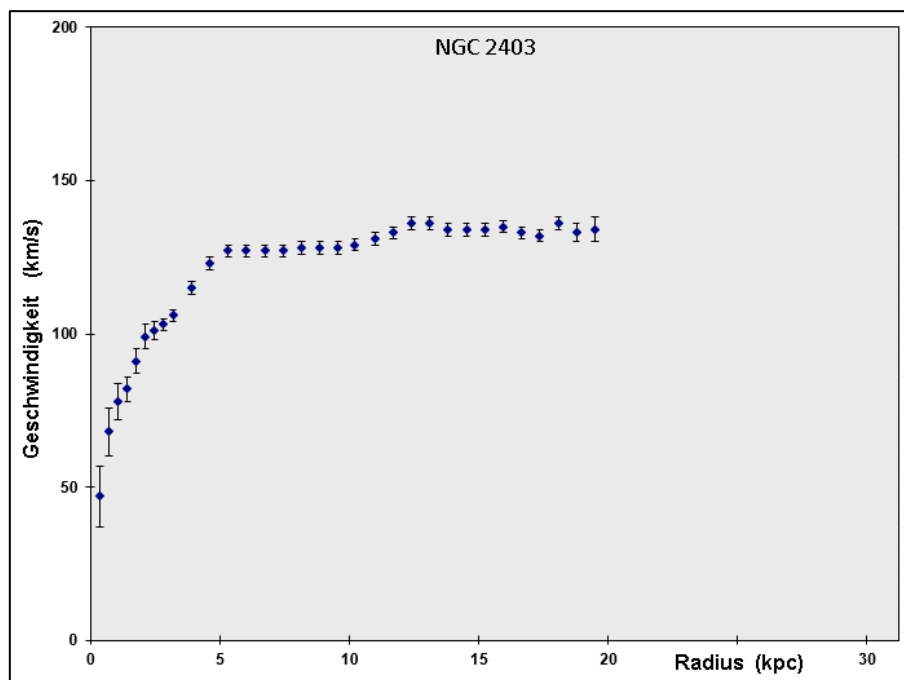
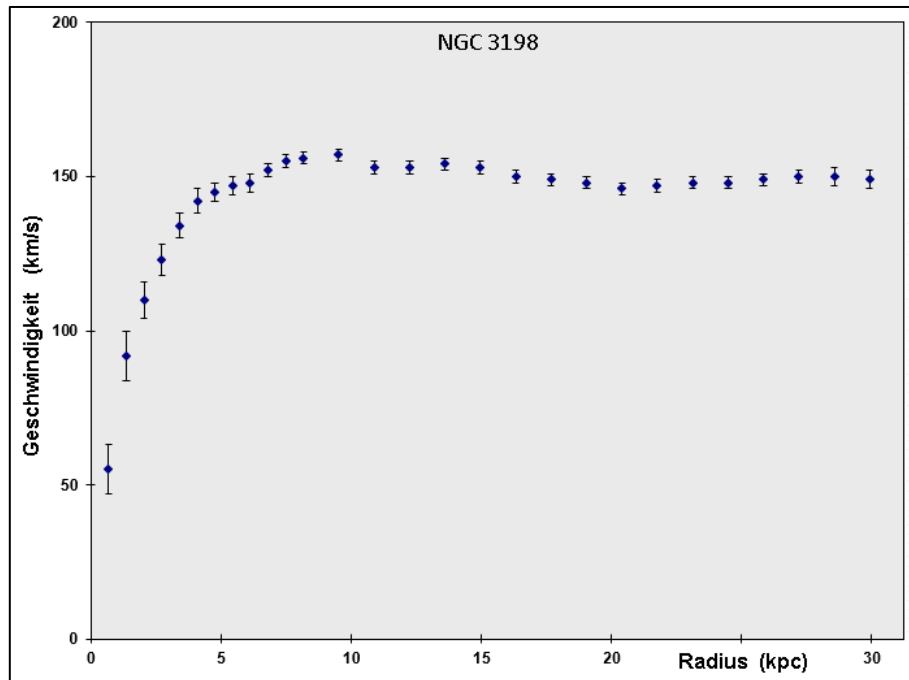
Die Wirklichkeit

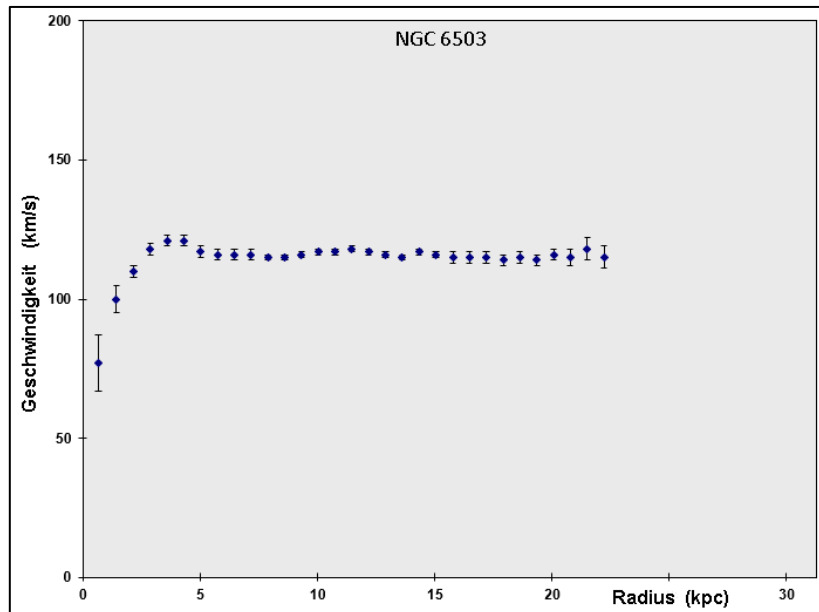
Bereits in den 1980-er Jahren wurden die Rotationskurven vieler Spiralgalaxien durch radioastronomische Messungen bestimmt. Das damals neu errichtete Radioteleskop WSRT (Westerbork Synthese Radioteleskop) in den Niederlanden, das aus 14 freistehenden 25-Metern Parabolantennen besteht, ermöglichte eine präzise Bestimmung der Dopplerverschiebungen der 21-cm Strahlung des neutralen Wasserstoffgases, das in der Galaxienscheibe reichlich vorhanden ist und weit über den Rand der sichtbaren Scheibe hinausragt. So wurde auch die Messung der Rotationsgeschwindigkeit des nichtoptischen Teils der Galaxie möglich.



Die Ergebnisse bestätigten die Untersuchungen der amerikanischen Astronomin Vera Rubin, die Ende der 1970-er Jahre im optisch sichtbaren Teil verschiedener Galaxien deren Rotationsgeschwindigkeiten bestimmt hatte. Die untersuchten Galaxien zeigten bei den optischen wie auch bei den radioastronomischen Messungen ausgeprägt flache Rotationskurven. Typische Vertreter sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Die Daten wurden in den 1980-

er Jahren mit den *Westerbork Synthese* Radioteleskopen gesammelt. Um das Auflösungsvermögen zu erhöhen, waren die 14 Teleskope interferometrisch zu einem Array zusammengeschaltet worden.





Die **flachen Rotationskurven** zeigen, dass die Sterne und das Gas in den Randbereichen der Galaxie viel zu schnell unterwegs sind.

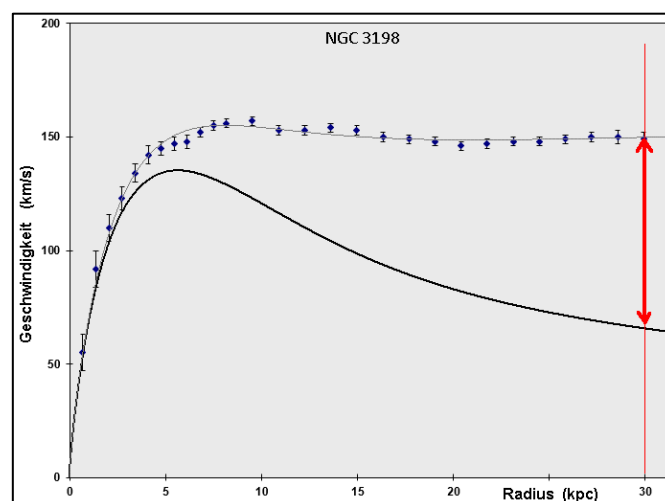
Ein Ausweg

Was verhindert also, dass die gesamte Galaxie aufgrund der enormen Fliehkräfte auseinandergerissen wird? Eine mögliche Antwort lautet: Die Galaxie muss deutlich mehr Masse enthalten, als aus der Leuchtkraft-Massebeziehung abgeleitet werden kann – und: diese zusätzliche Masse muss sich so verteilen, dass ihr kumulierter Wert mit dem Parameter r ungefähr

linear wächst. Dies lässt sich mit Hilfe der Formel $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ leicht einsehen, denn wenn die

Geschwindigkeit v mit wachsendem Abstand einigermaßen konstant bleiben soll (flache Rotationskurve), darf der Bruch unter der Wurzel sich nicht wesentlich verändern – was erfüllt wäre, wenn die Masse M proportional mit r wachsen würde.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese zusätzliche Masse enorm groß sein muss.



Wir rechnen:

Bei $r = 30$ kpc zeigt die abfallende (fett gezeichnete) Kurve eine Geschwindigkeit von etwa 65 km/s.

$$\text{Aus } v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \text{ erhalten wir } M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(65 \cdot 10^3)^2 \cdot 30 \cdot 3,0857 \cdot 10^{19}}{6,674 \cdot 10^{-11}} \text{ kg} = 5,86 \cdot 10^{40} \text{ kg}$$

Das sind etwa 30 Milliarden Sonnenmassen, also die Masse der Galaxienscheibe ohne Dunkle Materie.

Die Messung der Rotationsgeschwindigkeit bei 30 kpc liefert eine Geschwindigkeit von etwa 150 km/s. Damit erhalten wir eine Masse von

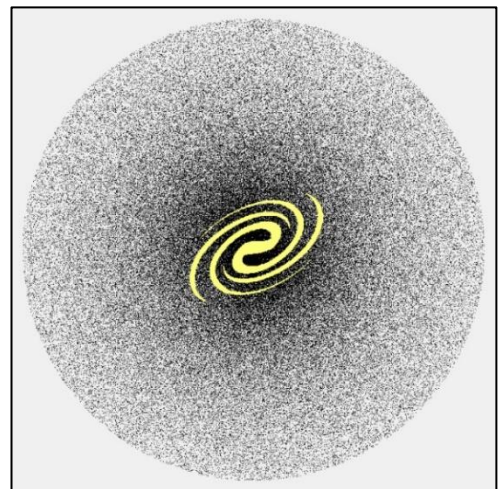
$$M = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{(150 \cdot 10^3)^2 \cdot 30 \cdot 3,0857 \cdot 10^{19}}{6,674 \cdot 10^{-11}} \text{ kg} = 3,12 \cdot 10^{41} \text{ kg}. \text{ Das sind 157 Milliarden Sonnenmassen.}$$

Das bedeutet:

Die Galaxie müsste mehr als fünfmal so viel Masse enthalten, als sich aus der Analyse der sichtbaren Galaxienmaterie ergibt. Anders formuliert: Nur etwa 20% der Materie ist sichtbar, aber 80% führt ein Schattendasein und ist in keinem der bekannten Wellenlängenbereichen zu erkennen. Dies also wäre dann die vermutete **Dunkle Materie**.

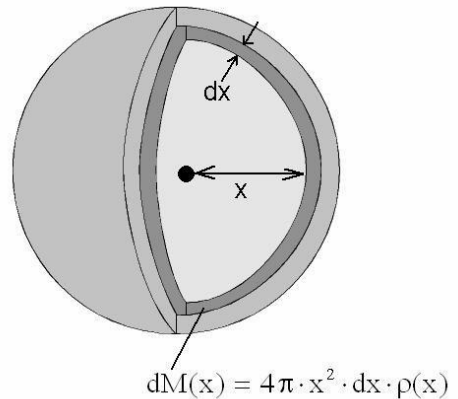
Die Dichteverteilung der Dunklen Materie

Es wird angenommen, dass die Galaxie in einen Halo aus Dunkler Materie eingebettet ist. Für die Dichteverteilung dieser Halo-Masse gibt es verschiedene Vorschläge. Im Folgenden sollen zwei Dichtefunktionen erklärt werden, die häufig verwendet werden und mathematisch noch einigermaßen überschaubar sind.



1. Das Dichteprofil einer **Isothermen Kugel** nimmt an, dass sich die Dunkle Materie ähnlich einem Gas konstanter Temperatur in einer freischwebenden Kugel verteilt. Die Dichte einer solchen Verteilung

folgt der Funktion:
$$\rho_{\text{Halo}}(r) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{a_H}\right)^2}$$



Der Parameter a_H ist die Skalenlänge der Verteilung. Um auf die kumulierte Masse des Halos am Ort r zu kommen, müssen die Massen der infinitesimal dünnen Kugelschalen bis zum Radius r durch Integration aufaddiert werden:

$$M_{\text{Halo}}(r) = 4\pi \cdot \rho_{0H} \cdot \int_0^r \frac{x^2}{1 + \left(\frac{x}{a_H}\right)^2} dx = 4\pi \cdot \rho_{0H} \cdot a_H^2 \cdot \int_0^r \frac{x^2}{a_H^2 + x^2} dx$$

Die Stammfunktion des Integrals findet man in entsprechenden mathematischen Tabellenwerken – mit dem Ergebnis:

$$M_{\text{Halo}}(r) = 4\pi \cdot \rho_0 \cdot a_H^3 \cdot \left(\frac{r}{a_H} - \arctan\left(\frac{r}{a_H}\right) \right).$$

2. Die Astronomen **Navarro, Frenk und White** schlugen 1995 ein Dichteprofil vor (NFW-Profil), das sich aufgrund von Computersimulationen als geeignet herausgestellt hatte:

$$\rho_{\text{Halo}}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{a_H} \cdot \left(1 + \frac{r}{a_H}\right)^2}$$

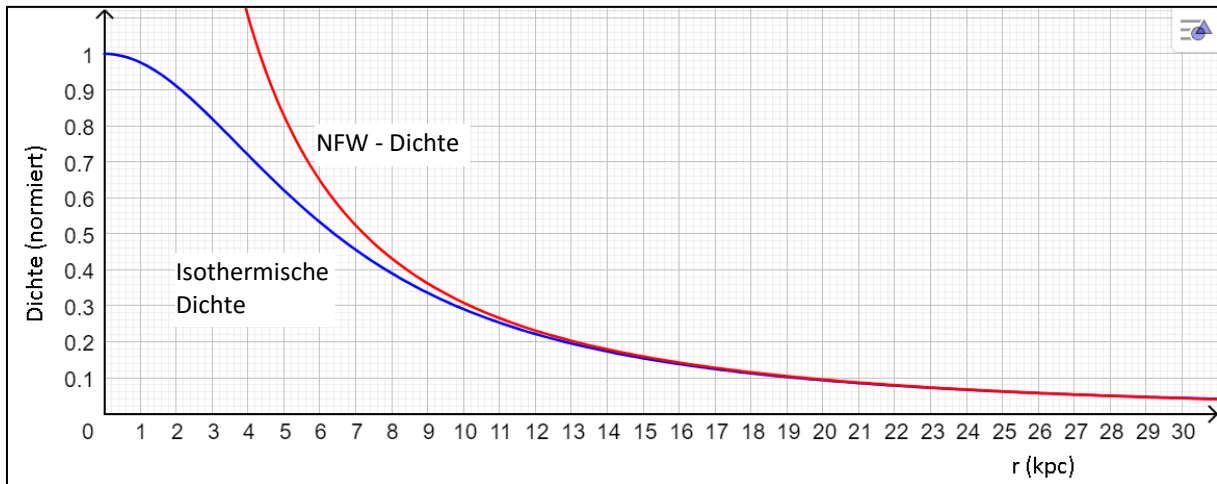
Auch hier ergibt das Integral die kumulierte Masse am Ort r :

$$M_{\text{Halo}}(r) = 4\pi \cdot \rho_{0H} \cdot a_H \cdot \int_0^r \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{a_H}\right)^2} dx$$

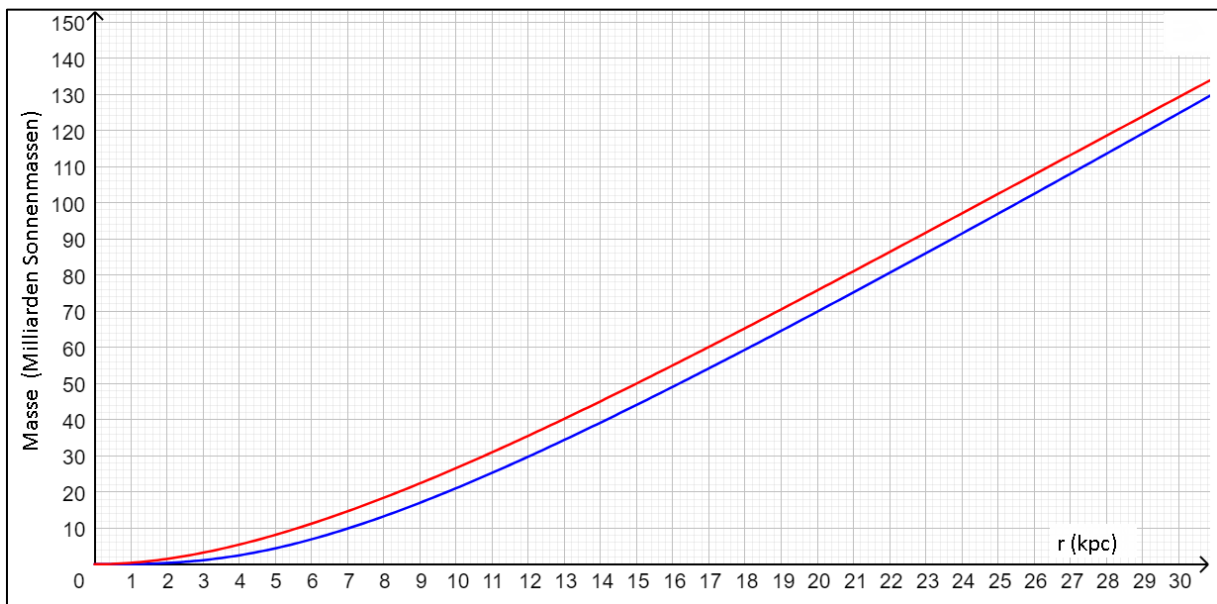
Das Ergebnis lautet:

$$M_{\text{Halo}}(r) = 4\pi \cdot \rho_0 \cdot a_H^3 \cdot \left(\ln\left(\frac{r + a_H}{a_H}\right) - \frac{r}{r + a_H} \right)$$

Der Verlauf der beiden Dichtefunktionen des DM-Halos

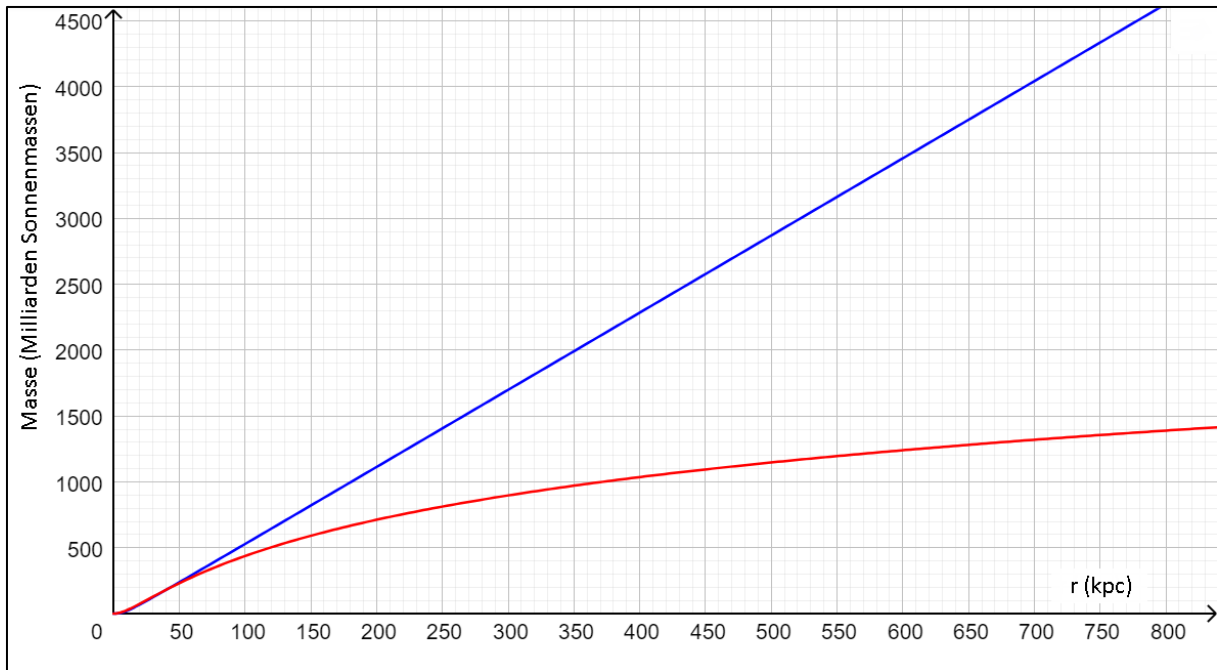


Die Masse-Funktionen des DM-Halos



Beide Dichteprofile führen mit zunehmendem Abstand vom Zentrum zu einer fast linear ansteigenden Masse des Galaxienhalos. Gerade dieses Verhalten liefert aber die Voraussetzung für die flache Rotationskurve der Galaxie.

Erst für sehr große Entfernungen vom Galaxienzentrum zeigt sich, dass die Dichtefunktion einer Isothermischen Kugel eher ungünstige Eigenschaften aufweist, da die Masse der Dunklen Materie für große Abstände von der Galaxie stetig steigt (blaue Kurve) und ins Unendliche führt. Dagegen ergibt das NFW-Dichteprofil einen moderateren Anstieg der Halo-Masse (rote Kurve).



Die Rotationsgeschwindigkeit:

Die Geschwindigkeit, mit der die Galaxienmaterie im Abstand r um das Zentrum rotiert, lässt sich mit der Formel $v_{\text{Rot}}(r) = \sqrt{\frac{G \cdot M(r)}{r}}$ berechnen. Die Masse $M(r)$ setzt sich dabei aus den kumulierten Massen der Galaxienscheibe und des DM-Halos im Abstand r zusammen:

$$M(r) = M_{\text{Disk}}(r) + M_{\text{Halo}}(r).$$

Beide Dichteprofile führen zu einer flachen Rotationskurve und zu guten Anpassungen an die Messwerte, wie die beiden Abbildungen zeigen.

Rotationsgeschwindigkeiten mit dem ISO-Dichteprofil

Galaxienscheibe:

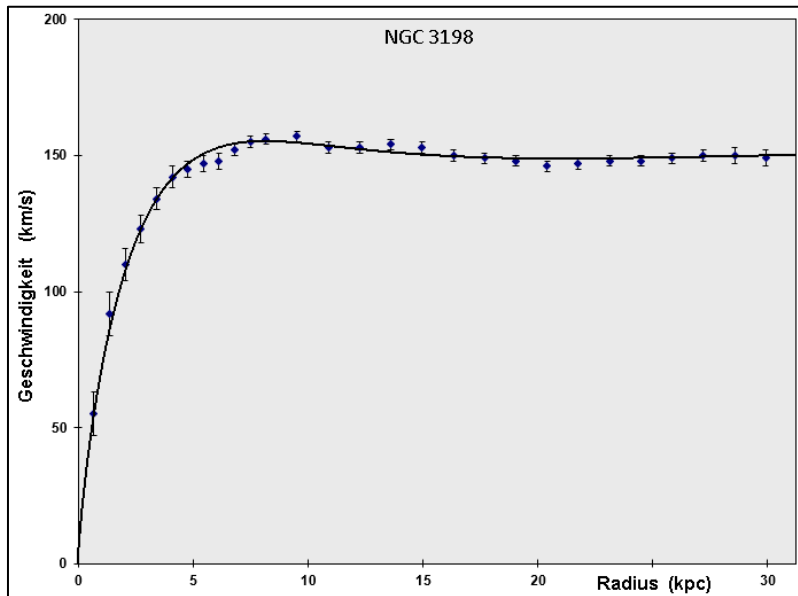
Flächendichte: $S_0 = 1,38 \text{ kg/m}^2$

Skalenlänge: $a_D = 2,63 \text{ kpc}$

DM-Halo:

Volumendichte: $r_0 = 7,75 \cdot 10^{-22} \text{ kg/m}^3$

Skalenlänge: $a_D = 2,63 \text{ kpc}$



Rotationsgeschwindigkeiten mit dem ISO-Dichteprofil

Galaxienscheibe:

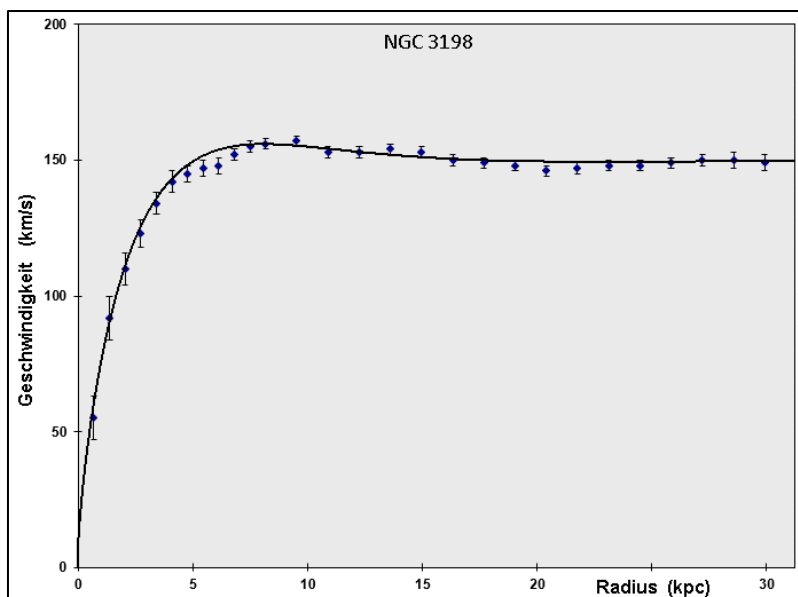
Flächendichte: $S_0 = 1,15 \text{ kg/m}^2$

Skalenlänge: $a_D = 2,66 \text{ kpc}$

DM-Halo:

Volumendichte: $r_0 = 1,72 \cdot 10^{-22} \text{ kg/m}^3$

Skalenlänge: $a_D = 26 \text{ kpc}$



MOND - eine Alternative zur Dunklen Materie?

Es ist durchaus möglich, dass die Astronomie mit der Postulierung der Dunklen Materie einen falschen Weg eingeschlagen hat. Einige Astronomen glauben das und haben begonnen, Modelle zu entwickeln, die ohne die exotische Materieform auskommen sollen. Eine viel diskutierter Ansatz ist die sogenannte „MOND-Theorie“. MOND steht dabei für **modifizierte newtonsche Dynamik**. Der bekannte Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung $F = m \cdot a$ gilt demnach in guter Näherung nur im Nahbereich von Massen. Auf großen Skalen, also bei Entfernungen von einigen Tausend Lichtjahren, verliert das Newtonsche Gesetz immer mehr an Gültigkeit. Ein möglicher Ansatz der Modifikation des Gesetzes lautet:

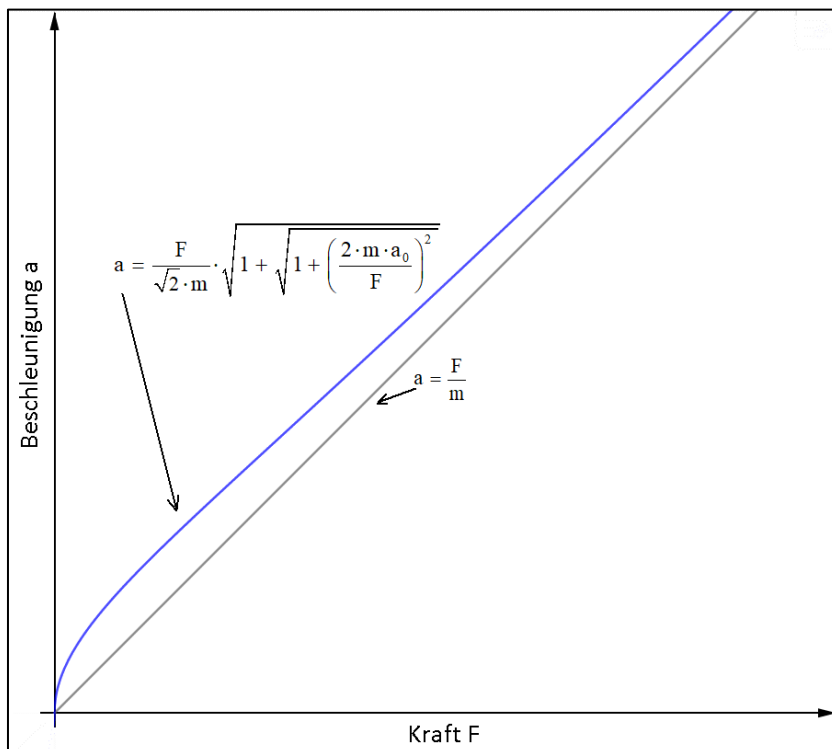
$$F = m \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a_0^2 + a^2}} \text{ mit } a_0 = 1,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Bei „normalen“ Beschleunigungen, wie man sie beispielsweise in der Nähe großer Himmelskörper vorfindet, ist die Konstante a_0 ohne Bedeutung, da ihr Wert extrem klein ist. $F = m \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a_0^2 + a^2}}$ geht dann sofort über in $F = m \cdot a$. Weit

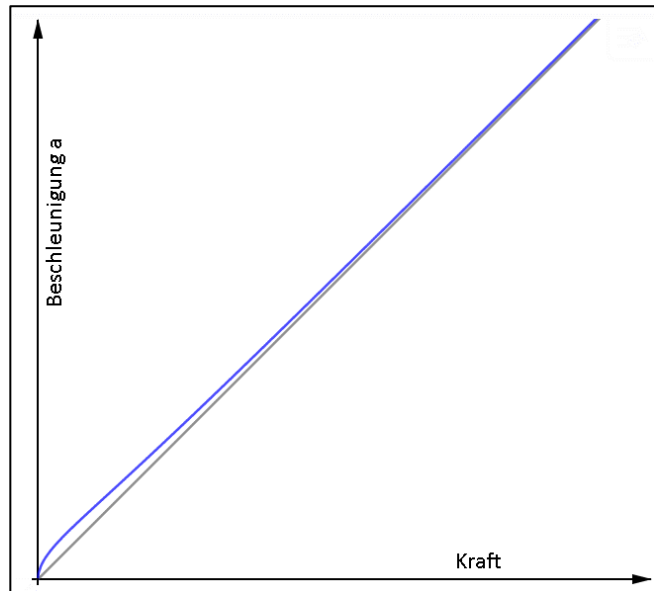
entfernt von einer Masse M wird die Beschleunigung a allerdings sehr klein und die Konstante a_0 gewinnt an Bedeutung. Wenn wir die obere Formel nach a umstellen (s. Anhang),

erhalten wir: $a = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot m} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot m \cdot a_0}{F}\right)^2}}$. Dies können wir mit der bekannten Newtonschen Gesetz $a = \frac{F}{m}$ vergleichen, indem wir a gegen F in einem Diagramm auftragen.

erhalten wir: $a = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot m} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot m \cdot a_0}{F}\right)^2}}$. Dies können wir mit der bekannten Newtonschen Gesetz $a = \frac{F}{m}$ vergleichen, indem wir a gegen F in einem Diagramm auftragen.



Kleine Kräfte, so wie sie außen in einer Galaxie auf eine Masse wirken, bewirken in der MOND-Theorie also eine größere Beschleunigung als die klassische Newtonsche Mechanik. Diese größere Radialbeschleunigung lässt Materie mit größeren Geschwindigkeiten umlaufen. Für große Kräfte nähern sich die beiden Funktionsgraphen indes immer mehr an – die modifizierte geht in die klassische Dynamik über.



Für sehr kleine Werte der Beschleunigung a lässt sich die obere Formel übrigens mithilfe eines Taylorpolynom zweiten Grades annähern (s. Anhang). Es ergibt sich dann:

$F \approx m \cdot \frac{a^2}{a_0}$. Die Kraft F wird durch die Gravitation der im Kugelradius r kumulierten Masse

$M(r)$ erzeugt. Daher gilt: $\frac{G \cdot M(r) \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{a^2(r)}{a_0} \Leftrightarrow \frac{G \cdot M(r)}{r^2} = \frac{a^2(r)}{a_0}$.

Dies lösen wir nach $a(r)$ auf: $a(r) = \frac{\sqrt{G \cdot M(r) \cdot a_0}}{r}$. Die Geschwindigkeit einer Masse auf einer Kreisbahn mit dem Radius r ergibt sich aus der Zentripetalbeschleunigung

$a(r) = \frac{v^2(r)}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{a(r) \cdot r}$. Dies ergibt mit der oberen Formel für die Beschleunigung:

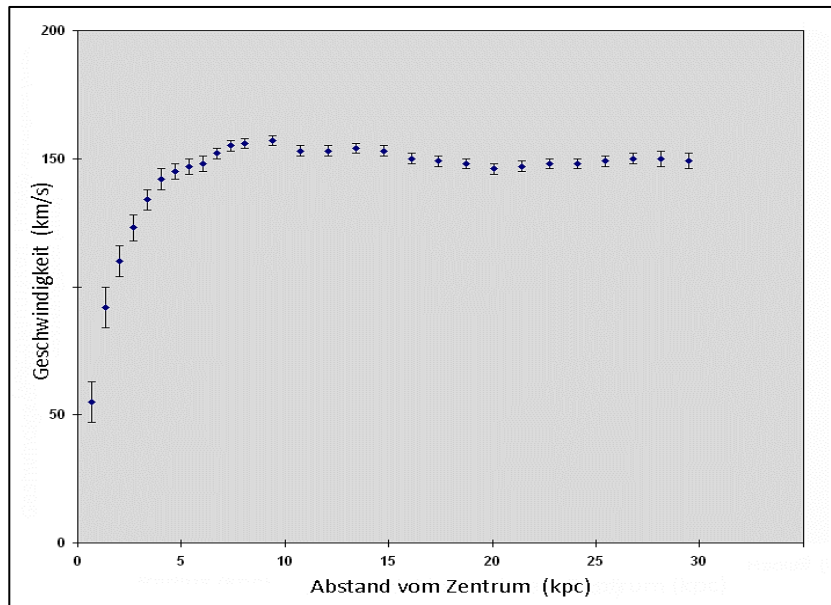
$$v(r) = \sqrt{a(r) \cdot r} = \sqrt{\frac{\sqrt{G \cdot M(r) \cdot a_0}}{r} \cdot r} \quad \text{und somit:} \quad v(r) = \sqrt[4]{G \cdot M(r) \cdot a_0}.$$

Für kleine Beschleunigungen, also sehr weit vom Massenzentrum entfernt, erhalten wir eine Formel, die eine nahezu konstante Geschwindigkeit vorhersagt.

Am Beispiel der Galaxie NGC 3198 lässt sich zeigen, dass die Formel durchaus plausible Werte erzeugt. Die sichtbare Masse (baryonische Materie) der Galaxie wird auf 30 Milliarden Sonnenmassen geschätzt. Damit ergibt sich:

$$v = \sqrt[4]{G \cdot M \cdot a_0} = \sqrt[4]{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 30 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1,2 \cdot 10^{-10}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 148057 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 148 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

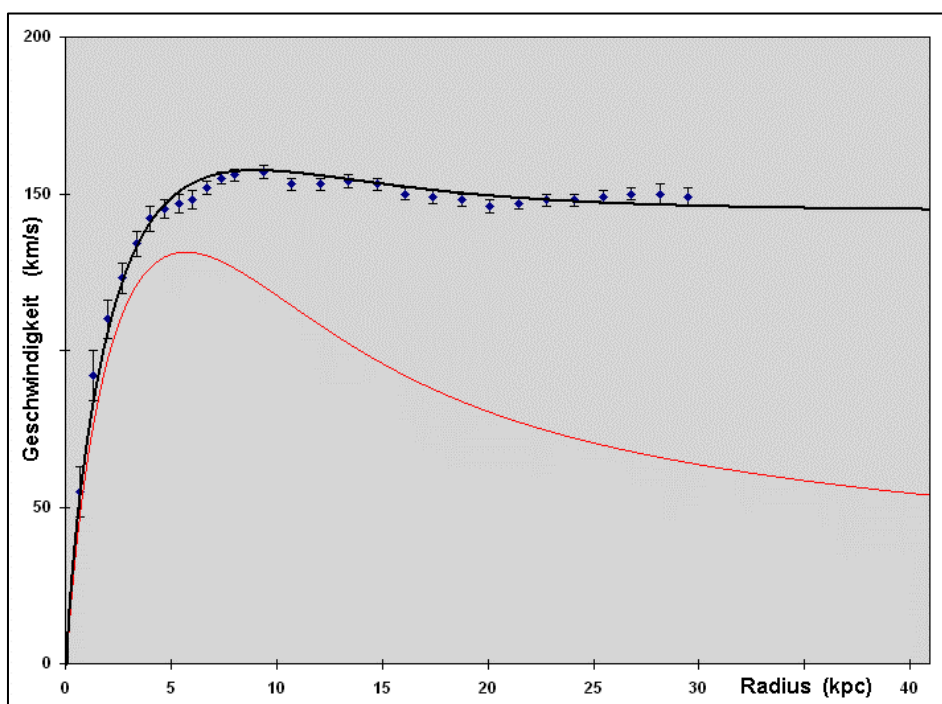
Dies stimmt gut mit den Werten überein, die mit Hilfe radioastronomischer Messungen ermittelt wurden, wie das Diagramm zeigt.



Möchte man den gesamten Verlauf der Rotationskurve nach der MOND-Theorie berechnen, ergibt sich eine etwas unhandliche Formel (s. Anhang), nämlich

$$v(r) = \sqrt{\frac{G \cdot M(r)}{\sqrt{2} \cdot r}} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot a_0 \cdot r^2}{G \cdot M(r)}\right)^2}} . \text{ Das untere Diagramm zeigt, dass sich diese}$$

Funktion gut an die gemessenen Rotationsgeschwindigkeiten anpassen lässt – vorausgesetzt, es werden die passenden Werte für die Anfangsdichte und die Skalenlänge der exponentiellen Dichteverteilung für die Galaxie gewählt. Diese beiden Parameter gehen nämlich in die Funktion der kumulierten Masse $M(r)$ ein.



Die modifizierte Newtonsche Dynamik (MOND) ist also durchaus in der Lage, die flachen Rotationskurven von Spiralgalaxien zu beschreiben – und das, ohne Dunkle Materie. Dieser Erfolg der MOND-Theorie sollte allerdings nicht darüber hinwegtäuschen, dass dieser neue Ansatz sich deutlich schwerer tut, andere astrophysikalische Phänomene zu erklären. Dazu gehören u.a. Gravitationslinsen, die Eigenschaften der kosmischen Hintergrundstrahlung und die Strukturbildungen im Universum wie z.B. die Entstehung von Galaxien.

Die große Mehrheit der Astronomen hält daher die Existenz der Dunklen Materie nach wie vor für plausibel und für sehr wahrscheinlich.

Die Beschleunigung

Wir stellen die Formel $F = m \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a_0^2 + a^2}}$ nach a um:

Aus $F^2 = \frac{m^2 \cdot a^4}{a_0^2 + a^2}$ ergibt sich:

$$m^2 \cdot a^4 - F^2 \cdot a^2 - F^2 \cdot a_0^2 = 0 \Leftrightarrow a^4 - \left(\frac{F}{m}\right)^2 \cdot a^2 - \left(\frac{F \cdot a_0}{m}\right)^2 = 0$$

Dies ist eine biquadratische Gleichung. Wir substituieren $z = a^2$ und erhalten die quadratische Gleichung: $z^2 - \left(\frac{F}{m}\right)^2 \cdot z - \left(\frac{F \cdot a_0}{m}\right)^2 = 0$ mit den Lösungen:

$$z_{1,2} = \left(\frac{F}{\sqrt{2} \cdot m}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{F}{\sqrt{2} \cdot m}\right)^4 + \left(\frac{F \cdot a_0}{m}\right)^2}.$$

Wir wählen die Lösung mit der positiven Wurzel und klammern geschickt aus:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{F}{\sqrt{2} \cdot m}\right)^2 + \sqrt{\left(\left(\frac{F}{\sqrt{2} \cdot m}\right)^4\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2} \cdot m}{F}\right)^4 \cdot \left(\frac{F \cdot a_0}{m}\right)^2\right)} \\ &= \left(\frac{F}{\sqrt{2} \cdot m}\right)^2 + \left(\frac{F}{\sqrt{2} \cdot m}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot m^2 \cdot F \cdot a_0}{F^2 \cdot m}\right)^2} \\ &= \left(\frac{F}{\sqrt{2} \cdot m}\right)^2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot m \cdot a_0}{F}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

Die Rücksubstitution ergibt schließlich:

$$a = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot m} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot m \cdot a_0}{F}\right)^2}}$$

Die Geschwindigkeit

Wenn die Masse m auf einer kreisförmigen Bahn umlaufen soll, muss die Gravitationskraft als Zentripetalkraft wirken. Daher ersetzen wir in der Formel

$$a = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot m} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot m \cdot a_0}{F}\right)^2}} \quad \text{die Kraft } F \text{ durch die Gravitationskraft}$$

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} \quad \text{und die Beschleunigung } a \text{ durch die Zentripetalbeschleunigung } a = \frac{v^2}{r}.$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G \cdot M}{\sqrt{2} \cdot r^2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot a_0 \cdot r^2}{G \cdot M}\right)^2}} \Leftrightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{\sqrt{2} \cdot r} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot a_0 \cdot r^2}{G \cdot M}\right)^2}}$$

Somit erhalten wir die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Radius r :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{\sqrt{2} \cdot r} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot a_0 \cdot r^2}{G \cdot M}\right)^2}}}.$$

Zu beachten ist dabei, dass die Masse M die innerhalb des Radius r eingeschlossene Masse darstellt, also ebenfalls vom Radius r abhängt. Diese Abhängigkeit wird je nach verwendetem Modell durch ein bestimmtes Dichteprofil (Dichtefunktion) beschrieben.

Die Näherung

Ein Ansatz in der MOND-Theorie (modifizierte Newtonsche Dynamik) verwendet anstelle des bekannten Gesetzes $F = m \cdot a$ ein verändertes Kraftgesetz: $F = m \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a_0^2 + a^2}}$ mit der sehr

kleinen Konstanten $a_0 = 1,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Die obere Formel lässt sich für kleine Beschleunigungen a durch die einfachere Beziehung

$F \approx m \cdot \frac{a^2}{a_0}$ annähern. Diese Näherung beruht auf einem Taylorpolynom zweiten Grades.

Dazu betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k^2 + x^2}}$. Das Taylorpolynom zweiten Grades an

der Stelle Null lautet $p(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot f''(0) \cdot x^2$. Wir benötigen also die ersten bei-

den Ableitungen von $f(x) = x^2 \cdot (k^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Diese sind:

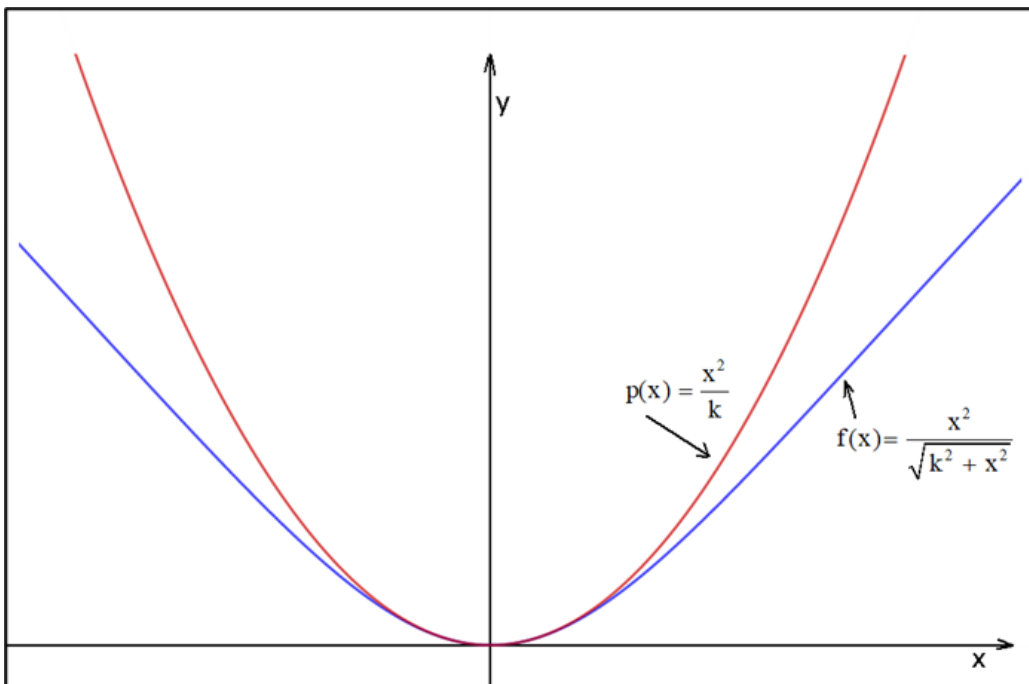
$$f'(x) = 2x \cdot (k^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^3 \cdot (k^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot (k^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - 2x^2 \cdot (k^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2 \cdot (k^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^4 \cdot (k^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

An der Stelle Null erhalten wir damit: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ und $f''(0) = \frac{2}{k}$. Das Taylorpoly-

nom lautet daher: $p(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k} \cdot x^2 = \frac{x^2}{k}$. Also gilt für kleine Werte von x die Approximation:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k^2 + x^2}} \approx \frac{x^2}{k}$$



Übertragen auf das MOND-Kraftgesetz bedeutet das: $F = m \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a_0^2 + a^2}} \approx m \cdot \frac{a^2}{a_0}$.