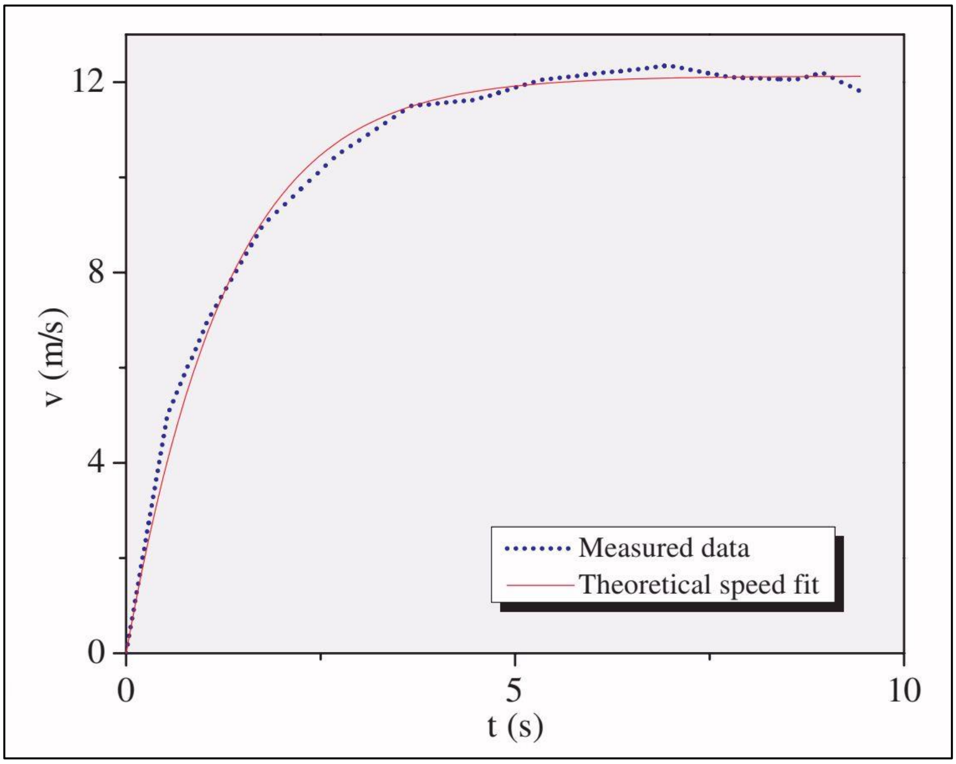
Der Weltrekordlauf von Usain Bolt

Matthias Borchardt, 2024

Keystone

Der jamaikanische Sprinter ***Usain Bolt*** hält bis dato (2024) den Weltrekord über die 100 m Strecke mit einer Zeit von 9,58 Sekunden. Das untere Diagramm zeigt, wie sich die **Geschwindigkeit** des Sprinters während des Weltrekordlaufs entwickelte. Ein solcher Kurvenverlauf ist typisch für Weltklassesprinter und lässt sich mathematisch in guter Näherung durch eine Exponentialfunktion der Form $\boxed{v(t) = v_{max} \cdot \left(1 - e^{-k \cdot t}\right)}$ beschreiben, wobei v_{max} die maximal erreichbare Geschwindigkeit darstellt und k eine Konstante ist, welche den Kurvenanstieg beeinflusst. Physikalisch sind die Größen **Strecke** (s), **Geschwindigkeit** (v) und **Beschleunigung** (a) wie folgt miteinander verknüpft: Die Ableitung der Streckenfunktion (Weg) ergibt die Geschwindigkeit und die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion ergibt die Beschleunigungsfunktion. Es gilt also $s'(t) = v(t)$ und $v'(t) = a(t)$.

Da die Geschwindigkeitsfunktion v(t) vorgegeben ist, können wir durch die Ableitung von v(t) die Beschleunigung a(t) und durch die Integration von v(t) die Wegfunktion s(t) ermitteln.



DOI 10.1088/01430807/34/5/1227

The current world record of 9.58 s was established by Usain Bolt in the 12th (IAAF) World Championships in Athletics (WCA) at Berlin, Germany in 2009.

a) Die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit beim Weltrekordlauf von Usain Bolt ist in dem oberen Diagramm dargestellt. Die theoretische Kurve lässt sich durch die Funktion $v(t) = 12 \cdot \left(1 - e^{-0,8 \cdot t}\right)$ modellieren, wobei **t** in Sekunden und **v** in m/s gemessen werden.

1. Zeigen Sie, dass sich für die **Beschleunigung** die Funktion $a(t) = 9,6 \cdot e^{-0,8 \cdot t}$ ergibt. (Die Beschleunigung **a** hat die Maßeinheit m/s²).

2. Stellen Sie die Beschleunigung graphisch dar und interpretieren Sie den Kurvenverlauf im Sachzusammenhang. Binden Sie auch den Verlauf der Geschwindigkeit (s. Abbildung) in Ihre Argumentation mit ein

b) Die **Zeit-Weg-Funktion** erhalten Sie durch Integration der Geschwindigkeitsfunktion: $s(t) = \int_0^t v(x)\,dx$.

1. Führen Sie die Integration durch und zeigen Sie, dass sich die Funktion $s(t) = 12 \cdot \left(t + 1,25 \cdot e^{-0,8 \cdot t} - 1,25\right)$ ergibt.
   (Die Strecke **s** hat die Maßeinheit m).

2. Nach 9,58 Sekunden sollte sich eine zurückgelegte Strecke von 100 m ergeben. Bestätigen Sie durch eine Rechnung diesen Wert.

3. Stellen Sie die Funktion s(t) graphisch dar und beschreiben Sie den Kurvenverlauf.

c) Damit der Sprinter auf seine Endgeschwindigkeit kommt, muss er sich in den ersten Sekunden des Starts stark beschleunigen. Innerhalb dieser Phase wird am meisten **Leistung** (gemessen in Watt) in horizontaler Richtung umgesetzt. Physikalisch gilt für die Leistung pro kg Körpergewicht: $P(t) = a(t) \cdot v(t)$.

1. Zeigen Sie, dass dies im konkreten Fall die Funktion $P(t) = 115,2 \cdot e^{-0,8 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-0,8 \cdot t}\right)$ ergibt.
   (Die Leistung **P** hat die Maßeinheit Watt).

2. Das untere Diagramm zeigt den Kurvenverlauf der Funktion P(t).
   Sie sehen, dass Usain Bolt nach weniger als einer Sekunde bereits die maximale Leistung erreichen konnte.
   - Berechnen Sie den genauen Zeitpunkt t_{max} des Maximums und geben Sie den maximalen Leistungswert (in Watt pro Kilogramm) an.

   - Berechnen Sie, nach wie vielen Metern das Maximum der Leistung erreicht wurde. Tipp: Setzen Sie den Zeitpunkt t_{max} in die Funktion s(t) ein.

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die der Sprinter zum Zeitpunkt t_{max} erreicht hat. Was fällt Ihnen an dem Ergebnis auf?

3. Der Durchschnitt der Funktionswerte einer Funktion f errechnet sich mit $\overline{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$. So können wir die **durchschnittliche Leistung** (pro Kilogramm) des Sprinters während der Zeitspanne T = 9,58 s berechnen:

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(t)\,dt\,.$$

- Zeigen Sie: Es ergibt sich ein Term der Form:

  $$\overline{P} = \frac{115,2}{9,58} \cdot \left(0,625 \cdot e^{-1,6 \cdot T} - 1,25 \cdot e^{-0,8 \cdot T} + 0,625\right)$$

  Tipp: Multiplizieren Sie die Klammer in der Funktion

  $P(t) = 115,2 \cdot e^{-0,8 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-0,8 \cdot t}\right)$ aus und integrieren Sie dann.

- Berechnen Sie die mittlere Leistung (pro kg) während der 9,58 Sekunden.

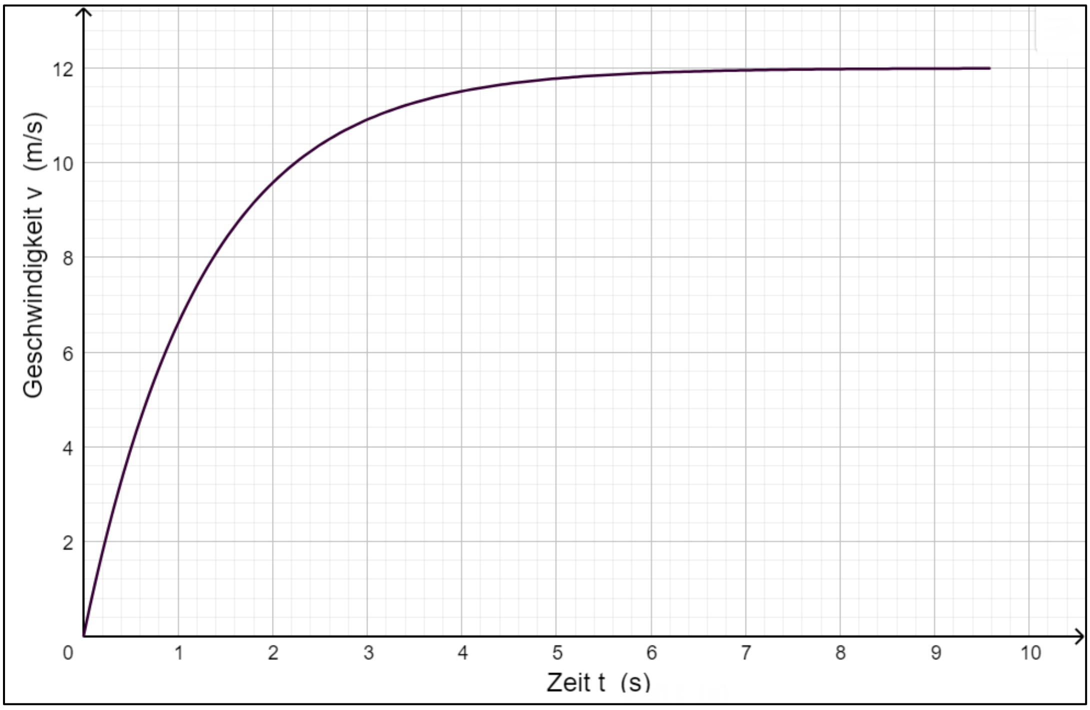
4. Gehen Sie davon aus, dass das Körpergewicht von Usain Bolt bei seinem Weltrekordlauf **95 kg** betrug. Berechnen Sie die maximale Leistung und die mittlere Leistung, die beim Beschleunigungsvorgang in horizontaler Richtung umgesetzt wurden. Geben Sie die Ergebnisse in Watt und in der Einheit PS an (1000 W = 1,36 PS).

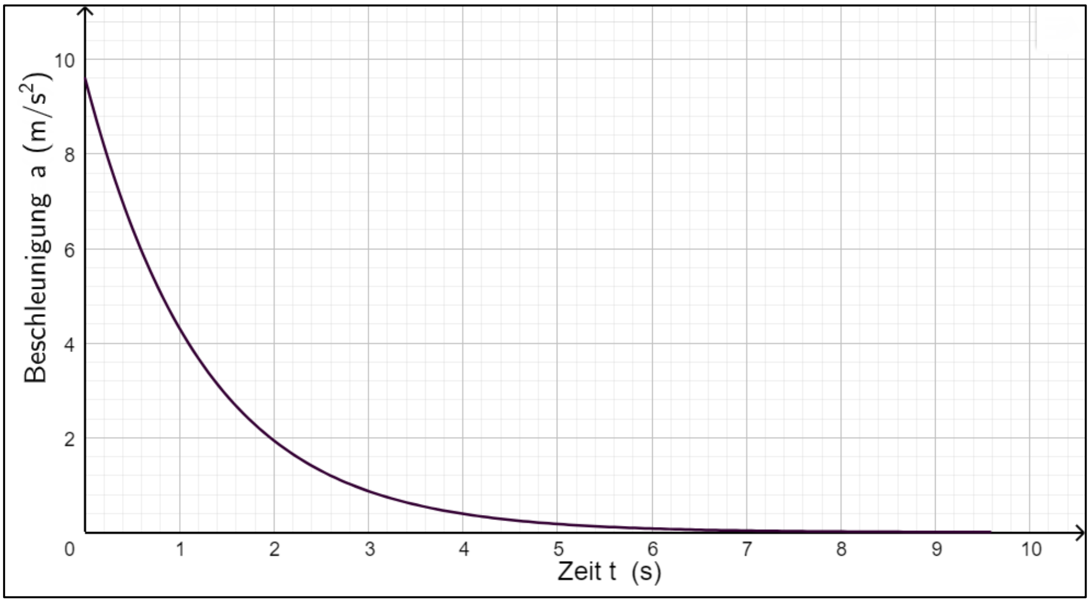
Eine Computersimulation, die Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Leistung für verschiedene Parameter darstellt, finden Sie hier: https://mabo-physik.de/mechanik-6

Lösungen:

a)

1. Die Beschleunigung ergibt sich aus der Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion: und $a(t) = v'(t) = 12 \cdot 0{,}8 \cdot e^{-0{,}8 \cdot t} = 9{,}6 \cdot e^{-0{,}8 \cdot t}$
2.





Die Beschleunigung **a** sinkt exponentiell, wobei der Hauptteil der Beschleunigungs-phase innerhalb der ersten beiden Sekunden liegt. Mit abnehmender Beschleunigung nimmt auch der Geschwindigkeitszuwachs ab. Die Geschwindigkeit nimmt nahezu konstante Werte an, wenn sich die Beschleunigung gegen Null entwickelt.

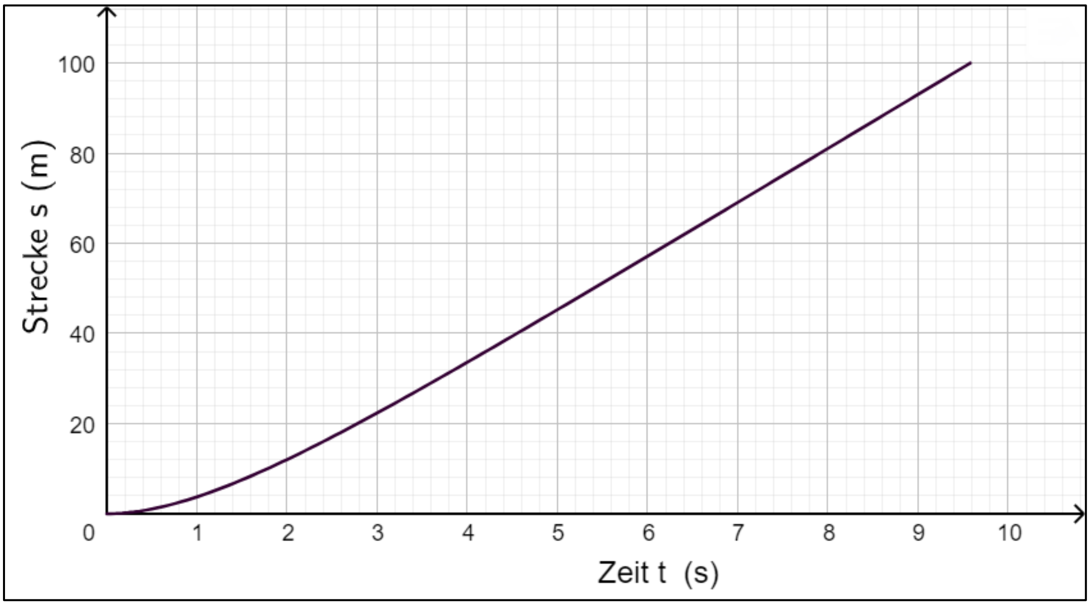
b)

1. $s(t) = \int_0^t v(x)\,dx = 12 \cdot \int_0^t \left(1 - e^{-0,8\cdot x}\right)dx$

$$= 12 \cdot \left[x + \frac{1}{0,8} \cdot e^{-0,8\cdot x}\right]_0^t = 12 \cdot \left(t + 1,25 \cdot e^{-0,8\cdot t} - 1,25\right)$$

2. $s(9,58) = 12 \cdot \left(9,58 + 1,25 \cdot e^{-0,8\cdot 9,58} - 1,25\right)m = 99,97\,m \approx 100\,m$

3.



Bereits nach etwa 2 Sekunden ergibt sich ein nahezu linearer Anstieg des zurückgelegten Wegs, was an der fast konstanten Geschwindigkeit liegt.

c)

1. Leistung (pro Kilogramm):
$P(t) = v(t) \cdot a(t) = 12 \cdot \left(1 - e^{-0,8\cdot t}\right) \cdot 9,6 \cdot e^{-0,8\cdot t} = 115,2 \cdot e^{-0,8\cdot t} \cdot \left(1 - e^{-0,8\cdot t}\right).$

2. Zunächst: Ausmultiplizieren der Klammer:
$P(t) = 115,2 \cdot e^{-0,8\cdot t} \cdot \left(1 - e^{-0,8\cdot t}\right) = 115,2 \cdot \left(e^{-0,8\cdot t} - e^{-1,6\cdot t}\right)$
(Alternative: Direkt Produktregel zum Ableiten anwenden)

Jetzt: Notwenige Bedingung: $P'(t) = 115,2 \cdot \left(-0,8 \cdot e^{-0,8\cdot t} + 1,6 \cdot e^{-1,6\cdot t}\right) = 0$

$\rightarrow\ -0,8 \cdot e^{-0,8\cdot t} + 1,6 \cdot e^{-1,6\cdot t} = 0 \,\big|\; : e^{-0,8\cdot t} \neq 0$

$\Leftrightarrow\ -0,8 + 1,6 \cdot e^{-0,8\cdot t} = 0 \,\big|\, + 0,8$

$\Leftrightarrow\ 1,6 \cdot e^{-0,8\cdot t} = 0,8 \ \Leftrightarrow\ e^{-0,8\cdot t} = 0,5 \ \big|\, \ln$

$-0,8 \cdot t = \ln(0,5) \ \Leftrightarrow\ t = \frac{\ln(0,5)}{-0,8} = \underline{\underline{0,866\,s}}$

$P(0,866) = 115,2 \cdot e^{-0,8\cdot 0,866} \cdot \left(1 - e^{-0,8\cdot 0,866}\right)\frac{W}{kg} = \underline{\underline{28,8\,\frac{W}{kg}}}$

$$s(0,866) = 12 \cdot \left(0,866 + 1,25 \cdot e^{-0,8 \cdot 0,866} - 1,25\right) m = \underline{\underline{2,9\,m}}$$

$$v(0,866) = 12 \cdot \left(1 - e^{-0,8 \cdot 0,866}\right) \frac{m}{s} = \underline{\underline{6s}}$$

Die maximale Leistung wurde nach einer Strecke von nur 2,9 m erreicht. Dort betrug die Geschwindigkeit 6 m/s. Es fällt auf, dass dies genau die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit von 12 m/s ist.
In der Tat wird die maximale Leistung nach der **Halbwertszeit** der Geschwindigkeitsfunktion erreicht.

3. $$\overline{P} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T 115,2 \cdot \left(e^{-0,8 \cdot t} - e^{-1,6 \cdot t}\right) dt$$
$$= \frac{1}{T} \cdot 115,2 \cdot \left[-1,25 \cdot e^{-0,8 \cdot t} + 0,625 \cdot e^{-1,6 \cdot t}\right]_0^T$$
$$= \frac{1}{T} \cdot 115,2 \cdot \left(-1,25 \cdot e^{-0,8 \cdot T} + 0,625 \cdot e^{-1,6 \cdot T} - (-1,25 + 0,625)\right)$$
$$= \frac{1}{T} \cdot 115,2 \cdot \left(-1,25 \cdot e^{-0,8 \cdot T} + 0,625 \cdot e^{-1,6 \cdot T} + 0,625\right)$$

Mit T = 9,58 s ergibt sich die mittlere Leistung pro kg Körpergewicht: $\overline{P} = \underline{\underline{7,51 \frac{W}{kg}}}$

4. Maximale Leistung: $P_{max} = 28,8 \frac{W}{kg} \cdot 95\,kg = 2736\,Watt = 3,72\,PS$

   Mittlere Leistung: $\overline{P} = 7,51 \frac{W}{kg} \cdot 95\,kg = 713,5\,Watt = 0,97\,PS \approx 1\,PS$

Usain Bolt konnte also nach 2,9 m Laufstrecke eine maximale Leistung von 3,72 PS umsetzen.
Im Mittel über die gesamte 100 m-Strecke betrug seine Leistung etwa 1 PS.

<u>Anmerkung:</u>
Dies ist die physikalisch umgesetzte Leistung in horizontaler Richtung. Davon zu unterscheiden ist die sogenannte „metabolische Leistung“ bzw. Energieverbrauch des menschlichen Körpers während des Laufs.