Die gravitative Rotverschiebung – Herleitung einer Näherungsformel

Matthias Borchardt, 2024

Für die Gravitations-Rotverschiebung gilt in guter Näherung die Formel $\boxed{\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \dfrac{G\cdot M}{R\cdot c^2}}$.

Herleitung

Die potentielle Energie einer Masse m im Abstand r vom Mittelpunkt der Sternenkugel ist $E_{pot} = -\dfrac{G\cdot M\cdot m}{r}$. Daher ergibt sich für die Gesamtenergie eines Photons auf der Oberfläche $E_1 = h\cdot f_1 - \dfrac{G\cdot M\cdot m_{ph}}{R}$.

Wegen $E_{Ph} = h\cdot f = m_{Ph}\cdot c^2$ gilt für die Masse des Photons $m_{Ph} = \dfrac{h\cdot f}{c^2}$ und somit

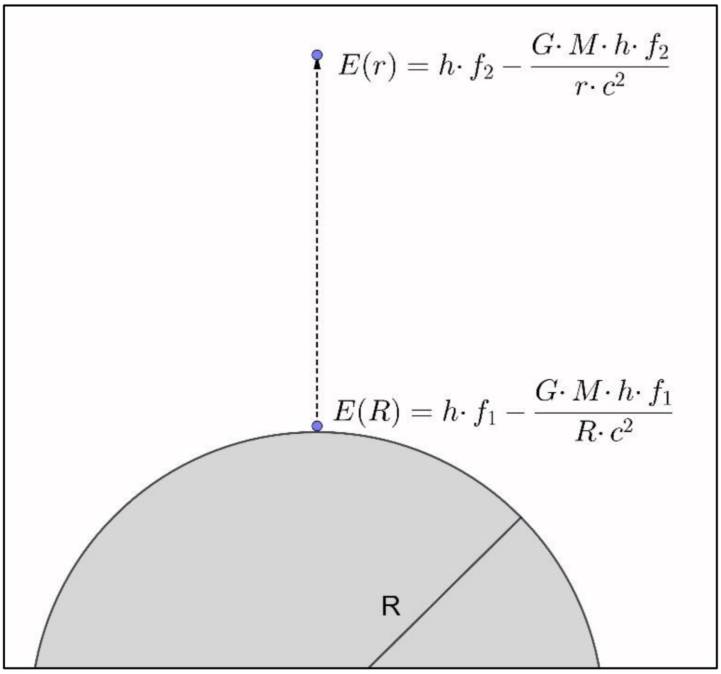
$$\boxed{E_1 = h\cdot f_1 - \frac{G\cdot M\cdot h\cdot f_1}{R\cdot c^2}}$$

Wenn das Photon im Schwerefeld der Sternenkugel aufsteigt, nimmt seine eigene Energie ab, was sich in einer Verringerung seiner Frequenz bemerkbar macht. Gleichzeitig gewinnt es aber potentielle Energie hinzu. Im Abstand r vom Mittelpunkt des Sterns gilt $E_2 = h\cdot f_2 - \dfrac{G\cdot M\cdot h\cdot f_2}{r\cdot c^2}$. Nun wollen wir aber das Photon ins Unendliche schicken und lassen daher r → ∞ laufen. Das führt dann zu $\boxed{E_2 = h\cdot f_2}$

Aufgrund der Energie-Erhaltung gilt nun: $E_1 = E_2$, also

$$h\cdot f_1 - \frac{G\cdot M\cdot h\cdot f_1}{R\cdot c^2} = h\cdot f_2 \quad\Leftrightarrow\quad f_1 - \frac{G\cdot M\cdot f_1}{R\cdot c^2} = f_2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f_1 - f_2}{f_1} = \frac{G\cdot M}{R\cdot c^2}$$

Für die **relative Frequenzverschiebung** erhalten wir so die Formel: $\boxed{\dfrac{\Delta f}{f_1} = \dfrac{G\cdot M}{R\cdot c^2}}$



Dies wollen wir in eine **Formel für die Wellenlängenverschiebung** überführen. Wir verwenden die oben bereits angegebene Beziehung

$f_2 = f_1 - \frac{G \cdot M \cdot f_1}{R \cdot c^2} \quad \Leftrightarrow \quad f_2 = f_1 \cdot \left(1 - \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}\right)$. Wegen $c = \lambda \cdot f$ gilt dann:

$$\frac{c}{\lambda_2} = \frac{c}{\lambda_1} \cdot \left(1 - \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}}.$$

An dieser Stelle ist es günstig, den **Schwarzschildradius r_s** der Sternenkugel zu verwenden. Dieser beträgt $r_S = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$. Damit lautet die obere Formel $\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_s}{2R}}$

Der Schwarzschildradius eines Sterns mit annährend Sonnenmasse beträgt etwa 3 km. Gegenüber dem typischen Radius eines Weißen Zwergs von 7000 km ist das sehr klein. Daher dürfen wir den Term $\frac{1}{1 - \frac{r_s}{2R}}$ für kleine Werte von r_S durch einen einfacheren Näherungsterm ersetzen. Die Funktion $f(r_s) = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{2R}}$ entspricht ja einer mathematischen Funktion der Form $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1}$. Diese Funktion ersetzen wir durch die Tangente an der Stelle x=0 (Taylorpolynom ersten Grades): $t(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$.

Die Ableitung ist: $f'(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-2}$. An der Stelle x=0 ergibt sich $f(0) = 1$ und $f'(0) = \frac{1}{a}$ und damit eine Tangentengleichung $t(x) = 1 + \frac{x}{a}$.

Das bedeutet also: Für $r_s \ll R$ gilt

$$\frac{1}{1 - \frac{r_s}{2R}} \approx 1 + \frac{r_s}{2R} \quad \text{bzw.}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}} \approx \lambda_1 \cdot \left(1 + \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}\right)$$

Dies führt zu

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \left(1 + \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}$$

So ergibt sich in guter Näherung die **relative Wellenlängenverschiebung**

$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{G \cdot M}{R \cdot c^2}}$$