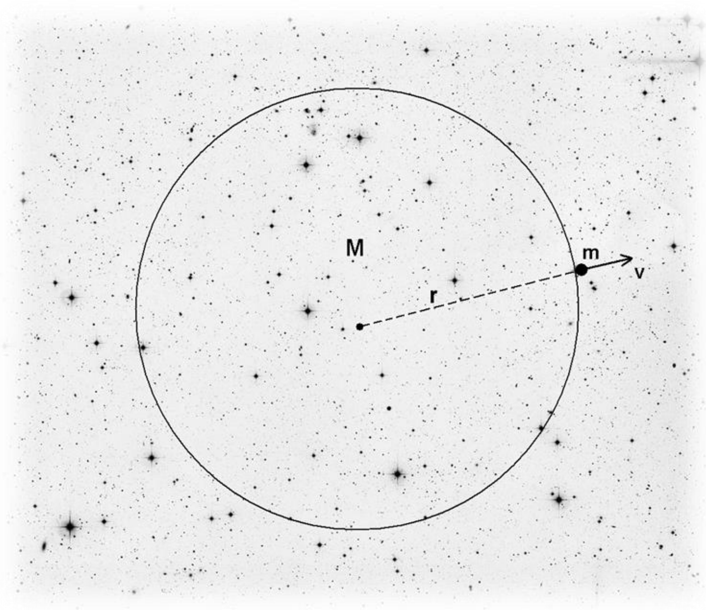
Materialien zum Thema: Expansionsdynamik des Weltalls

Matthias Borchardt

Die gebremste Expansion - das Einstein-de Sitter Universum

Ansatz

Seit dem Urknall ist der Raum in steter Ausdehnung begriffen und führt die Galaxien dabei mit sich fort. Es liegt nahe, dass diese Expansion von der Gravitationswirkung der auseinanderstrebenden Materie beeinflusst wird. Wir nähern uns diesen Zusammenhängen mit einer Analyse der beteiligten Energien. Dabei gehen wir stets davon aus, dass die Materie im Universum gleichmäßig (isotrop) verteilt ist. Man vermutet, dass dies tatsächlich zutrifft, wenn die betrachteten Raumbereiche groß genug gewählt werden.



Angenommen eine Galaxie mit der Masse m bewegt sich im Abstand r mit der Geschwindigkeit v von uns weg - ihre kinetische Energie beträgt dann: $E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. Die Bewegung der Galaxie wird gebremst durch die Gravitationskraft, welche von der Gesamtmasse M, die sich innerhalb der Kugel mit dem Radius r befindet, bewirkt wird. Die Gravitationswirkungen der Massen außerhalb dieser Kugel addieren sich, dem Newtonschen Schalentheorem entsprechend, zu Null und müssen daher nicht berücksichtigt werden. Wichtig ist allerdings, dass sich der Kugelradius r zwar vergrößert, die eingeschlossene Masse M aber aufgrund der Expansion des gesamten Raumes konstant bleibt. Die potentielle Energie der Galaxie m innerhalb des Gravitationsfeldes, das durch die Kugelmasse M erzeugt wird, beträgt: $E_{pot} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r}$. Die Gesamtenergie ist dann: $E_{ges} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot m \cdot M}{r}$. Wir betrachten nun den besonderen Fall, dass die Gesamtenergie Null ist. Das bedeutet, dass die Expansionsgeschwindigkeit im Unendlichen gegen Null geht – die kinetische Energie soll also vollständig in „Hubarbeit“ umgewandelt werden, so dass gilt: $0 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot m \cdot M}{r}$. Dies vereinfachen wir zu: $v^2 \cdot r = 2 \cdot G \cdot M$.

Diese Formel hilft uns bei zwei wichtigen Herleitungen:

Die kritische Dichte

Mithilfe $v_b^2 \cdot r_b = 2 \cdot G \cdot M$ leiten wir einen Ausdruck für die kritische Dichte der Materie her, also die Dichte, die eine Expansion ermöglicht, die im Unendlichen zum Stillstand kommt. Dazu betrachten wir die Position und Geschwindigkeit der Galaxie zum Zeitpunkt der Beobachtung ($t = t_b$), also heute. Der Index „b“ soll dies symbolisieren. Weiterhin verwenden wir das Hubble-Gesetz in der Form $v_b = H_0 \cdot r_b$ und stellen die Masse M mithilfe der kritischen Dichte und des Kugelvolumens $M = \rho_k \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_b^3$ dar. Einsetzen in die obere Formel ergibt:

$$v_b^2 \cdot r_b = 2 \cdot G \cdot M$$

$$H_0^2 \cdot r_b^3 = 2 \cdot G \cdot \rho_k \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_b^3 \quad \Leftrightarrow \quad H_0^2 = \cdot \frac{8}{3}\pi \cdot G \cdot \rho_k$$

Damit finden wir die Formel für die kritische Dichte: $\boxed{\rho_k = \frac{3 \cdot H_0^2}{8\pi \cdot G}}$.

Wir verwenden einen aktuellen Wert der Hubble-Konstante (Planck-Daten 2015) mit $H_0 = 67{,}74 \frac{km}{s \cdot MPc} = 2{,}1953 \cdot 10^{-18} \frac{1}{s}$ und berechnen damit die kritische Dichte:

$\rho_k = \frac{3 \cdot H_0^2}{8\pi \cdot G} = \frac{3 \cdot \left(2{,}1953 \cdot 10^{-18}\right)^2}{8\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} \frac{kg}{m^3} = 8{,}625 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{m^3}$. Die Masse eines Wasserstoffatoms beträgt etwa $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Damit erhalten wir $\frac{8{,}625 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{m^3}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\, kg} \approx 5{,}2 \frac{1}{m^3}$.

Das bedeutet: Wenn etwa fünf Wasserstoffatome in jedem Kubikmeter des Weltalls vorhanden sind, ist die besagte kritische Dichte erreicht und das Universum dehnt sich so gebremst aus, dass es im Unendlichen zum Stillstand kommt. Bereits ein Atom weniger pro Kubikmeter würde bedeuten, dass die Expansion niemals zum Stillstand kommt, ein Atom mehr pro Kubikmeter, dass sich das Universum irgendwann wieder aufgrund der Gravitationswirkung zusammenzieht, also kollabiert. Fünf Atome pro Kubikmeter erscheint unglaublich wenig - wenn wir uns aber alle Sterne und kosmischen Objekte in Atome aufgelöst denken, die wir gleichmäßig im Universum verteilen, ist diese Zahl durchaus realistisch. Das Universum ist insgesamt betrachtet einfach sehr, sehr leer.

Die Skalenfunktion

Die Skalenfunktion ist eine nützliche Funktion, die es uns gestattet, die Expansionsdynamik im Laufe der Zeit zu modellieren. Die Funktion wird üblicherweise mit a(t) bezeichnet, was leider die Gefahr einer Verwechselung mit der physikalischen Größe der Beschleunigung birgt. Dennoch wollen wir uns hier an die vereinbarte Schreibweise der Kosmologen halten. Die Skalenfunktion ist wie folgt definiert: $r(t) = a(t) \cdot r_b$ oder anders aufgeschrieben $a(t) = \frac{r(t)}{r_b}$. Die Funktion ist also dimensionslos und beschreibt, wie weit sich das Weltall zum Zeitpunkt t im Vergleich zu seiner jetzigen Größe r_b ausgedehnt hat.

Die Funktion r(t) leiten wir aus der bereits bekannten Beziehung $v^2 \cdot r = 2 \cdot G \cdot M$ ab. Dazu ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel und schreiben $v(t) = \dot{r}(t) = \frac{dr}{dt}$ und erhalten:

$$v^2 \cdot r = 2 \cdot G \cdot M \Leftrightarrow v \cdot \sqrt{r} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M}$$

$$\frac{dr}{dt} \cdot \sqrt{r} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \quad \Leftrightarrow \quad dr \cdot \sqrt{r} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot dt$$

Nun können wir auf beiden Seiten das Integral bilden. Diesen mathematischen Kunstgriff nennt man auch „Separation der Variablen“[1].

$$\int_0^{r(t)} \sqrt{r}\, dr = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot \int_0^t dt$$

$$\frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}}(t) = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad r(t) = \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot t \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{\frac{9}{2} \cdot G \cdot M} \cdot t \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$r(t) = \left(\frac{9}{2} \cdot G \cdot M \right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$$

Nun drücken wir noch die Masse M mit Hilfe der kritischen Dichte $\rho_k = \frac{3 \cdot H_0^2}{8\pi \cdot G}$ aus:

$$M = \rho_k \cdot V = \frac{3 \cdot H_0^2}{8\pi \cdot G} \cdot \frac{4\pi \cdot r_b^3}{3} = \frac{H_0^2}{2 \cdot G} \cdot r_b^3$$ und setzen ein:

$$r(t) = \left(\frac{9}{2} \cdot G \cdot M \right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{9}{2} \cdot G \cdot \frac{H_0^2}{2 \cdot G} \cdot r_b^3 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{9}{4} \cdot H_0^2 \cdot r_b^3 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2} \cdot H_0 \right)^{\frac{2}{3}} \cdot r_b \cdot t^{\frac{2}{3}}$$

Zu Beginn dieses Abschnitts hatten wir die Skalenfunktion a(t) eingeführt durch $r(t) = a(t) \cdot r_b$

Damir ergibt sich nun: $a(t) \cdot r_b = \left(\frac{3}{2} \cdot H_0 \right)^{\frac{2}{3}} \cdot r_b \cdot t^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow a(t) = \left(\frac{3}{2} \cdot H_0 \right)^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$

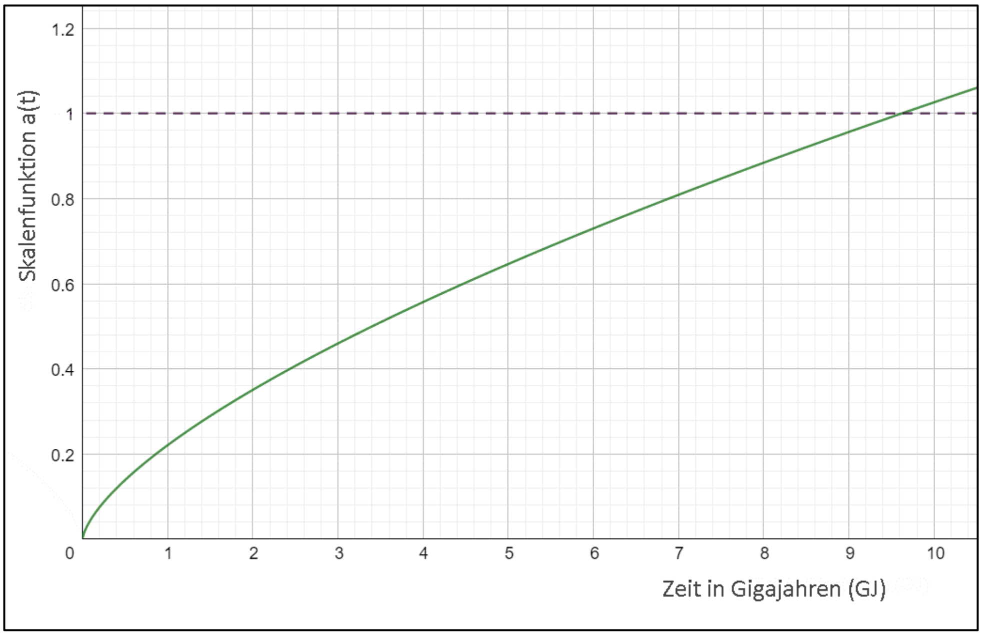
[1] Eine weitere Möglichkeit, die Differentialgleichung zu lösen, finden Sie im Anhang

Die Skalenfunktion wird damit durch die folgende Funktion gegeben:

$$\boxed{a(t) = \left(\frac{3}{2}\cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}}$$

Wenn wir den Vorfaktor ausrechnen erhalten wir: $a(t) = 0{,}221\cdot t^{\frac{2}{3}}$, wobei t in Giga-Jahren, also in Milliarden Jahren angegeben wird.

Die Skalenfunktion ist also eine Potenzfunktion, deren Kurve die gebremste Expansion des Weltalls darstellt. Die untere Abbildung zeigt den Verlauf von a(t) für den aktuellen Wert der Hubble-Konstante. Man erkennt, dass die Ausdehnungsgeschwindigkeit mit der Zeit abnimmt. Der heutige Wert der Expansion, also $a(t_b) = 1$, wird nach etwa 9,6 Milliarden Jahren nach dem Urknall erreicht. Wir wissen heute, dass das Weltall deutlich älter sein muss (ca. 14 Milliarden Jahre). Unser Modell bedarf also einer Korrektur, auf die aber erst später punktuell eingegangen werden soll, denn der moderne Ansatz, das sogenannte ΛCDM-Modell (Lambda Cold Dark Matter) fußt auf der Allgemeinen Relativitätstheorie und ist mit erheblich größerem mathematischem Aufwand verbunden. Auch das „alte“ Expansionsmodell, das wir oben kennengelernt haben, wurde seinerzeit von Albert Einstein und dem holländischen Astronomen de Sitter aus der Relativitätstheorie entwickelt, kann aber in seinen Grundzügen auch rein klassisch begründet werden, wir oben gesehen haben. Interessanterweise galt dieses Einstein-de Sitter Modell bis etwa 1998 recht unangefochten als Standardmodell der Kosmologie. Erst als man die Entfernungen extrem weit entfernter Supernovae vermessen konnte, wurde klar, dass vor etwa 6 Milliarden Jahren das Universum von einer gebremsten in eine beschleunigte Expansion übergegangen sein muss – eine Entdeckung, welche die Astronomen völlig überraschte und der Kosmologie zahlreiche neue Impulse gab, aber auch viele neue und schwierige Fragen aufwarf.



Wir wollen noch das Alter des Universums nach dem Einstein – de Sitter Modell exakt ausrechnen, was nicht besonders schwierig ist: Wir setzen für den heutigen Wert der Skalenfunktion den Wert 1 und formen nach t um: $1 = \left(\frac{3}{2}\cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot t_b^{\frac{2}{3}} \;|\wedge 3$

$$1 = \frac{9}{4}\cdot H_0^2 \cdot t_b^2 \;|\text{Wurzel} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{3}{2}\cdot H_0 \cdot t_b \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_b = \frac{2}{3\cdot H_0}}$$

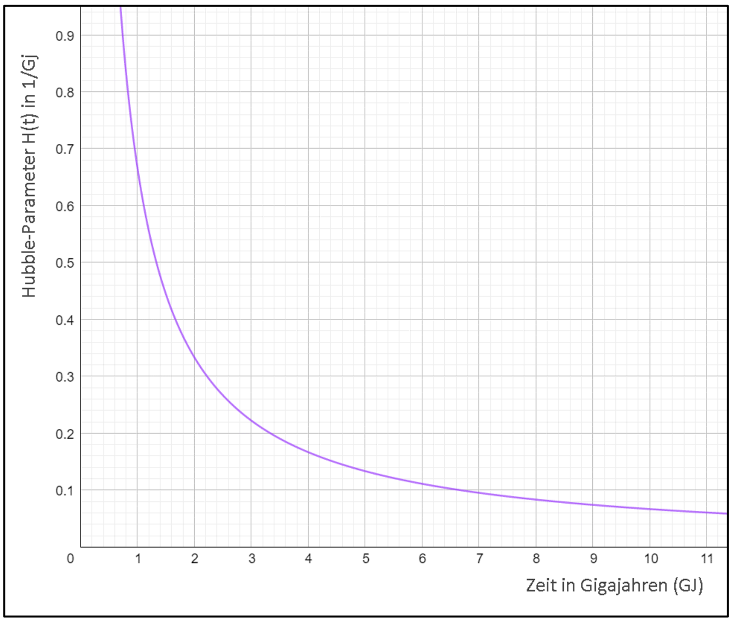
Einsetzen der Hubble-Konstante ergibt:

$$t_b = \frac{2}{3\cdot H_0} = \frac{2}{3\cdot 2{,}1953\cdot 10^{-18}\,\frac{1}{s}} = 3{,}03681\cdot 10^{17}\,s = 9{,}623 \text{ Milliarden Jahre}.$$

Übrigens wird der Begriff Hubble-Konstante manchmal falsch verstanden, denn eigentlich ist diese Angabe zeitlich gesehen keine Konstante. Gemeint ist nämlich lediglich der heutige Wert, der mit H_0 bezeichnet wird. Der Hubble-Parameter H(t) ergibt sich durch folgende Festlegung: $H(t) = \frac{\dot a(t)}{a(t)}$, also das Verhältnis der Änderungsrate der Skalenfunktion zur Funktion selbst. Im Falle des Einstein-de Sitter Universums ergibt das:

$a(t) = \left(\frac{3}{2}\cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$ ableiten nach t → $\dot a(t) = \left(\frac{3}{2}\cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3}\cdot t^{-\frac{1}{3}}$ und damit:

$$H(t) = \frac{\dot a(t)}{a(t)} = \frac{\left(\frac{3}{2}\cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3}\cdot t^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{3}{2}\cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3\cdot t} \quad \rightarrow \quad \boxed{H(t) = \frac{2}{3\cdot t}}$$



Das bedeutet, dass der Hubble-Parameter einer Hyperbelfunktion folgt. Der Wert von H war früher also deutlich größer als heute und nimmt stetig ab – im Einstein-de Sitter Modell sogar im Unendlichen bis zum Wert Null.

Zum Abschluss dieses Kapitels darf ein **wichtiger Hinweis** nicht fehlen. Die Ergebnisse, die wir oben hergeleitet haben, wurden alle auf der Basis der Newtonschen Gravitationstheorie erarbeitet. Dieser Ansatz ignoriert aber völlig die Raumausdehnung. Stattdessen wächst unsere Raumkugel innerhalb eines bereits bestehenden Raumes, allerdings so, dass die in der Sphäre eingeschlossenen Masse konstant bleibt, was der Idee eines sich ausdehnenden Raums nahekommt. Das Einstein-de Sitter Modell müsste konsequenterweise aus der Allgemeinen Relativitätstheorie abgeleitet werden, deren Feldgleichungen sich durch weitreichende Symmetrieannahmen vereinfachen lassen, was dann zur sogenannten Friedmann-Lemaître-Gleichung und der Robertson-Walker-Metrik führt. Diese Ansätze sind auf Schulniveau allerdings nicht umsetzbar.

Die kosmologische Rotverschiebung

Bereits Edwin Hubble beobachtete, dass die Spektrallinien in den Spektren von Galaxien in den langwelligen Bereich verschoben sind. Er interpretierte diese Rotverschiebung als Dopplereffekt, der durch die relative Bewegung von Quelle und Empfänger zustande kommt. Diese Interpretation ist nicht richtig, wie wir heute wissen. Vielmehr ist es der Raum selbst, der durch seine Expansion die Lichtwellen auf ihrem langen Weg durch die Raumzeit in die Länge zieht und so die Spektrallinien in den roten Bereich des Spektrums verschiebt. Diese kosmologische Rotverschiebung wird mit dem Buchstaben z beschrieben und ist wie folgt definiert: $z = \frac{\lambda(t_b) - \lambda(t_e)}{\lambda(t_e)} = \frac{\lambda(t_b)}{\lambda(t_e)} - 1$, dabei bedeuten t_e der Zeitpunkt der Emission (Senderwellenlänge) und t_b der Zeitpunkt der Beobachtung (Empfangswellenlänge). Das Verhältnis der Wellenlängen zu den beiden Zeitpunkten entspricht dem Verhältnis der Entfernungen zu den beiden Zeiten und damit dem Wert der Skalenfunktion zum Zeitpunkt t_e. Daher dürfen wir schreiben: $\frac{\lambda(t_e)}{\lambda(t_b)} = \frac{r(t_e)}{r(t_b)} = a(t_e)$. Die Größen a und z hängen demnach wie folgt miteinander zusammen: $z = \frac{1}{a} - 1$ bzw. $a = \frac{1}{z+1}$. Das bedeutet, wenn man die Rotverschiebung z aus dem Spektrum der Supernova oder ihrer Galaxie bestimmt hat, kennt man den Wert der Skalenfunktion zu der Zeit t_e. Nun kann man vergleichen, ob die beobachtete Helligkeit (also Entfernung) der Supernova mit der übereinstimmt, welche die Skalenfunktion des EdS-Modells liefert.

Dichteparameter und Hubble-Konstante

Die Dichte der Materie und der Dunklen Energie bestimmen maßgeblich die Expansionsdynamik des Universums. Üblicherweise werden diese Größen in Prozent der kritischen Dichte angegeben und mit dem großen griechischen Buchstaben Omega bezeichnet. Der Dichteparameter für die Materie, die sich aus der sichtbaren (baryonischen) und der Dunklen Materie zusammensetzt, lautet daher $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{krit}}$ und für die Energiedichte aufgrund der Dunklen Energie ergibt sich $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{krit}}$. Die Summe dieser beiden Größen soll 1, also 100% ergeben, wenn wir von der Strahlungsdichte ρ_r absehen, die nur in der Anfangsphase der Expansion eine gewisse Rolle spielt. Somit gilt also: $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

Die Daten des Planck-Satelliten, der vor einigen Jahren die kosmische Hintergrundstrahlung mit großer Präzision vermessen hatte, lieferte für die Dichteparameter und die Hubble-Konstante die folgenden Werte (*Planck Collaboration Cosmological Parameters, 2015*)[2]:

$$H_0 = 67,74 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \ (\pm 0,46)$$
$$\Omega_m = 0,3089 \ (\pm 0,0062)$$
$$\Omega_\Lambda = 0,6911 \ (\pm 0,0062)$$

Das bedeutet, dass etwa 30% der Gesamtdichte des Universums der Materie zuzuordnen ist und etwa 70% der Dunklen Energie, wobei sich die Materie wiederum zu etwa 5% aus sichtbarer (baryonischer) und zu 25% aus Dunkler Materie zusammensetzt.

Bei allen folgenden Rechnungen werden wir diese Parameterwerte verwenden.

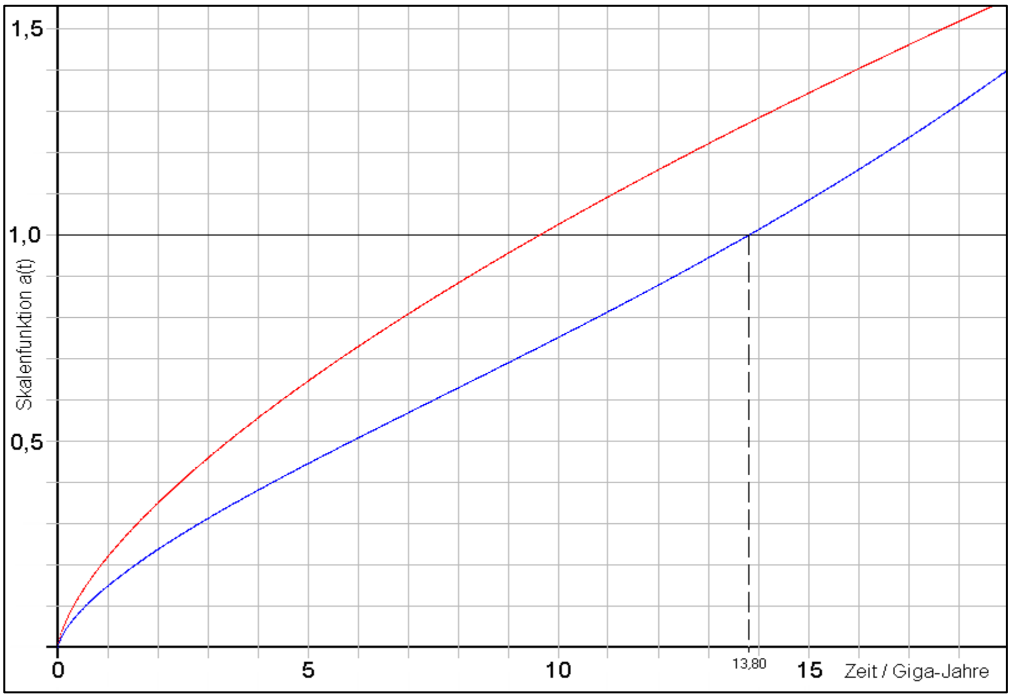
Die Skalenfunktion

Die Skalenfunktion a(t), welche die zeitliche Entwicklung der Expansion zeigt, ergibt sich im ΛCDM-Modell aus den Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie und sieht mathematische wesentlich komplexer aus, als die Skalenfunktion des Einstein-de Sitter-Modells, das bekanntermaßen von einer gebremsten Expansion ausgeht. Die Skalenfunktion des ΛCDM-Modells lautet:

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model#cite_note-Planck_2015-18

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\sinh\left(1{,}5 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t\right)\right]^{\frac{2}{3}}$$

Darin taucht die Funktion *Sinus-Hyperbolicus* (sinh) auf, die sich mithilfe der e-Funktion ausdrücken lässt: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Da wir die Dichteparameter und die Hubble-Konstante kennen, lässt sich diese Funktion mit Hilfe einer Mathematik-Software graphisch darstellen und mit der Skalenfunktion des EdS-Modells $a(t) = \left(\frac{3}{2} \cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$ vergleichen:



Die obere Kurve (rot) stellt die Skalenfunktion der gebremsten Expansion dar, die untere (blau) unsere neue Skalenfunktion des ΛCDM-Modells. Deutlich erkennt man, dass die Zuwachsrate der neuen Funktion zunächst abnimmt, die Expansion also gebremst wird, dann aber in einen beschleunigten Zustand übergeht. Das Weltalter ergibt sich an der Stelle, an der die Skalenfunktionen den Wert 1 annimmt, also die Ausdehnung des heue beobachtbaren Universums erreicht ist. Das Weltalter im EdS-Modell ergibt sich demnach zu etwa 9,6 Milliarden Jahren und im ΛCDM-Modell zu 13,8 Milliarden Jahren.

Der Wendepunkt der Funktion liegt bei 7,62 Milliarden Jahren[3]. Die Skalenfunktion hat dort einen Wert von etwa 0,61. Das bedeutet:

---

[3] Eine Herleitung finden Sie im Anhang

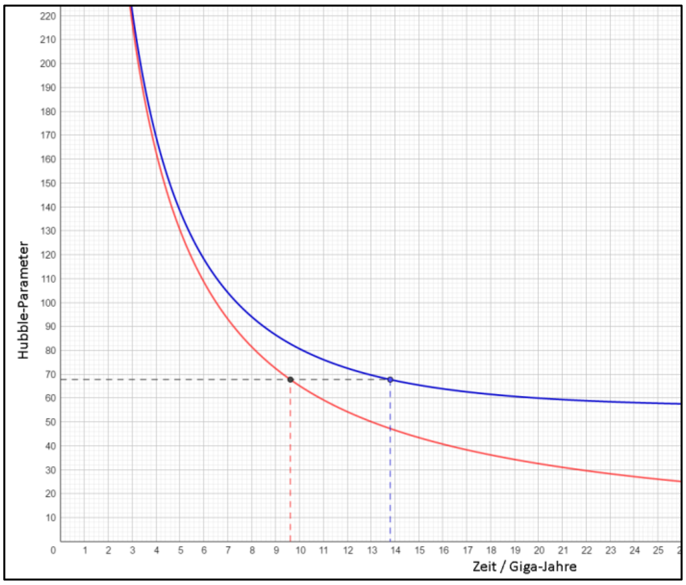
Dem ΛCDM-Modell zufolge wechselte die Expansion des Universums nach 7,62 Milliarden Jahren nach dem Urknall von einem gebremsten in einen beschleunigten Zustand. Das Weltall hatte damals etwa 61% seiner heutigen Größe erreicht.

Anders formuliert: Seit etwa 6 Milliarden Jahren leben wir in einem Universum, dass sich immer schneller ausdehnt.

Interessanterweise lässt sich die untere Kurve komplett in die obere überführen, wenn man den Dichteparameter der Dunklen Energie auf Null setzt. Mit dem kleinen Computerprogramm „*Skalenfunktion.exe*“[4], welches der Verfasser auf seiner Homepage zum freien Download zur Verfügung stellt, können Sie dies anschaulich nachempfinden und selbst ausprobieren. Das EdS-Modell ist also im ΛCDM-Modell enthalten, nämlich genau für den Fall, dass das Universum ein rein materiedominiertes ist, d.h., wenn gilt: $\Omega_m = 1$ und $\Omega_\Lambda = 0$.

Der Hubble-Parameter

Die Hubble-Konstante H_0 ist der Wert des Hubble-Parameters H(t) zum heutigen Zeitpunkt. Die Funktion H(t) ist wie folgt festgelegt: $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Führt man die Ableitung der Skalenfunktion aus (s. Anhang) und setzt diese in die obere Beziehung ein, ergibt sich die Hubble-Funktion zu: $H(t) = H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot \coth\left(1{,}5 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t\right)$, wobei die Funktion Kotangens-Hyperbolicus Verwendung findet[5]. Die graphische Darstellung zeigt, dass der Hubble-Parameter ähnlich wie im EdS-Modell - dort hieß die Funktion $H(t) = \frac{2}{3 \cdot t}$ - eine monoton fallende Funktion ist.



[4] https://mabo-physik.de/expansion-des-weltalls

[5] Eine Herleitung der Hubble-Funktion aus der Skalenfunktion finden Sie im Mathematischen Anhang

Die obere Kurve (blau) stellt die Hubble-Funktion des ΛCDM-Modells dar, die untere Kurve (rot), die des EdS-Modells. Interessanterweise strebt erstere einem Grenzwert für große Werte von t an: $\lim_{t\to\infty} H(t) = H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} = 67,74 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \cdot \sqrt{0,6911} = 56,314 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ an, während die zweite Kurve gegen Null geht.

Wie groß ist das Universum?

Wie wir gesehen haben, beträgt das Alter des ΛCDM-Universums 13,8 Milliarden Jahre. Da das Licht, das von Objekten kurz nach dem Urknall ausgegangen ist, etwa 13,8 Milliarden Jahre gebraucht hat, um uns zu erreichen, könnte man meinen, die Größe des sichtbaren Universums entspricht gerade diesem Wert. Diese Vorstellung ist aber falsch, denn das Licht und die Materie, die das Licht aussandte, bewegen sich in der Raumzeit auf sehr unterschiedlichen Bahnen. Dies ist eine Folge der Expansionsdynamik des Weltalls.

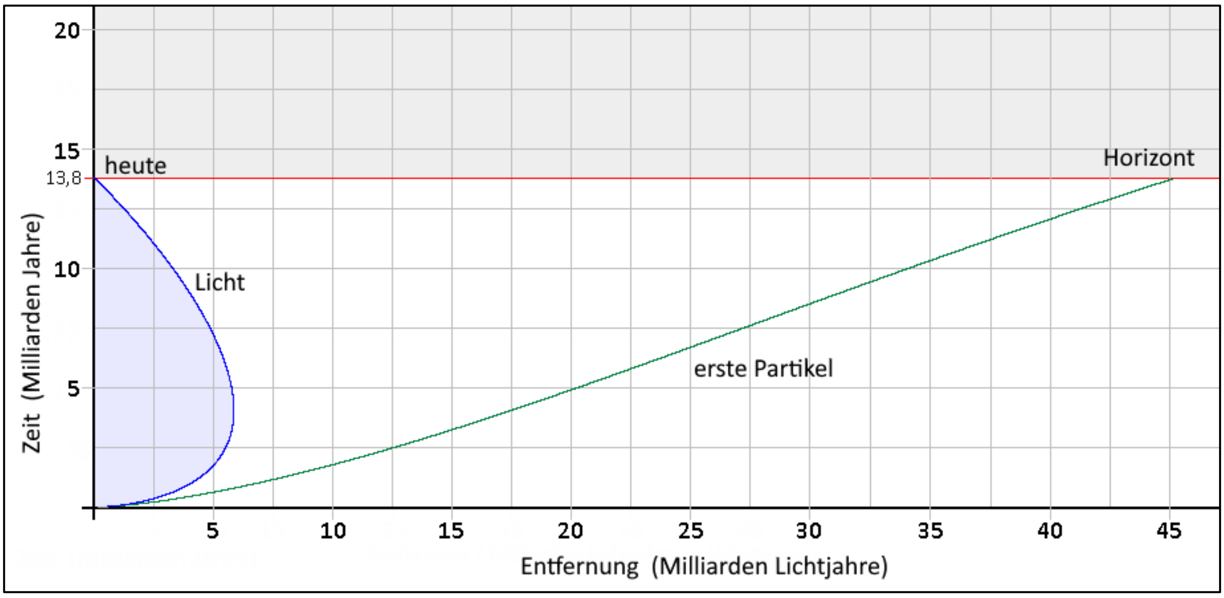
Rufen Sie das kleine Computerprogramm „*Hubblegesetz.exe*“[6] auf und starten Sie die Bewegung der Galaxien. Sie erkennen, dass die Galaxien sich immer schneller vom Beobachter (linker Rand) wegbewegen, je weiter sie vom linken Rand entfernt sind. Dieses Phänomen macht auch vor der Lichtgeschwindigkeit nicht halt – vielmehr bewegen sich die Galaxien jenseits des sogenannten Hubbel-Radius mit Überlichtgeschwindigkeit von uns weg. Man sagt auch, sie befinden sich im superluminaren Raum. Dies ist kein Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie, weil es der Raum selbst ist, der sich ausdehnt. Klicken Sie im Programm nun den Menüpunkt „Galaxie + Photon“ an. Wenn sich die Galaxie, die das Photon in unsere Richtung aussendet, im superluminaren Raum ist, wird es zunächst von der Raumexpansion mitgerissen – es bewegt sich vom Beobachter weg. Da es aber aufgrund seiner eigenen Geschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit) in Richtung des Beobachters viel langsamer als der sich ausbreitende Raum ist, wird es von Raumbereichen überholt, die sich mit kleinerer Geschwindigkeit ausdehnen. Sobald der Hubble-Radius das Photon eingeholt hat, bekommt es wieder eine Geschwindigkeitsrichtung zum Beobachter hin und bewegt sich immer schneller auf ihn zu bis es mit Lichtgeschwindigkeit bei ihm eintrifft. So ist es möglich, dass wir das Licht einer Galaxie empfangen, die bei Aussenden des Lichtteilchens bereits hinter dem Hubble-Radius lag, also weiter entfernt war, als die Lichtgeschwindigkeit eines Photons in einem statischen Universum zulassen würde. Beim Empfang des Photons hat sich die Galaxie bereits sehr weit fortbewegt. Das Universum ist zum Zeitpunkt der Beobachtung also deutlich gewachsen.

Diese unterschiedlichen Bahnen von Galaxien und Photonen im expandierenden Universum werden gerne in einem Raum-Zweit Diagramm dargestellt. Üblicherweise wird die Zeitachse dabei auf die y-Achse gelegt, woran man sich zunächst ein wenig gewöhnen muss. Das Computerprogramm „*Expansion.exe*“ des Verfassers ermöglicht Ihnen, die Ausbreitung von

[6] https://mabo-physik.de/expansion-des-weltalls

Galaxien und deren Licht in einem solchen Raum-Zeit- Diagramm zu verfolgen. Wenn Sie das Programm starten (Start-Button), berechnet und zeichnet die Simulation die Ausbreitung des ersten Lichts (Hintergrundstrahlung) und den Weg der Materie, die dieses Licht ausgesendet hatte. Sie erkennen, dass das Licht sich, wie oben bereits erklärt wurde, zunächst vom sich ausbreitenden raum mitbewegt wird bis es nach einer gewissen Zeit den Hubble-Radius überschreitet. Von da an bewegt sich das Licht im Laufe der Zeit auf uns zu, um dann nach etwa 13,8 Milliarden Jahren bei uns einzutreffen. Die Materie ist in dieser Zeit aber bereits fast 46 Milliarden Lichtjahre von uns entfernt. Dies ist der Rand des für uns beobachtbaren Universums – weiter können wir nicht schauen. Das bedeutet aber nicht, dass das Universum hinter diesem Radius zu Ende ist. Die Frage „Wie groß ist das Universum?“ müsste man richtigerweise also anders formulieren, nämlich „Wie groß ist das beobachtbare Universum?“. Die Antwort lautet:

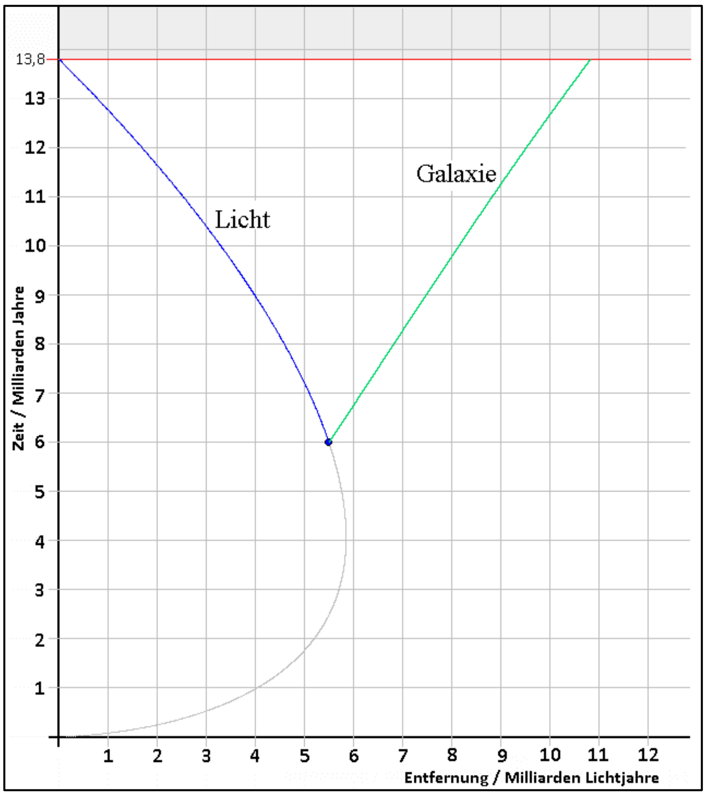
Wenn das ΛCDM-Modell tatsächlich zutrifft, wovon die meisten Astronomen überzeugt sind, hat das beobachtbare Universum einen Radius von etwa 46 Milliarden Lichtjahren, bzw. einen Durchmesser von 92 Milliarden Lichtjahren.



Sie können mithilfe des Programms die Bahnen von Licht und Galaxien von beliebigen Positionen aus starten. Befindet sich die Galaxie auf dem Lichtkegel (light cone), erreicht uns das Licht dieser Galaxie heute und wir können ablesen, welche Entfernung die Galaxie bei der Aussendung des Lichts hatte und wo sie sich befindet, wenn wir das Licht heute sehen.

Ein Beispiel

Die Supernova SN 1997ck hat eine Rotverschiebung von z=0,97. Wir suchen mithilfe des Schiebereglers durch Probieren die Startposition, die uns genau diesen z-Wert liefert. Dann können wir ablesen, dass die Galaxie ihr Licht, das wir heute sehen, etwa 6 Milliarden Jahre nach dem Urknall (also vor etwa 7,8 Milliarden Jahren) aussendete. Damals war die Galaxie 5,5 Milliarden Lichtjahre von uns entfernt. Heute hat sie eine Entfernung von etwa 10,8 Milliarden Lichtjahre. Das Licht der Supernova in dieser Galaxie startete also, als das Weltall etwa halb so groß war wie heute.



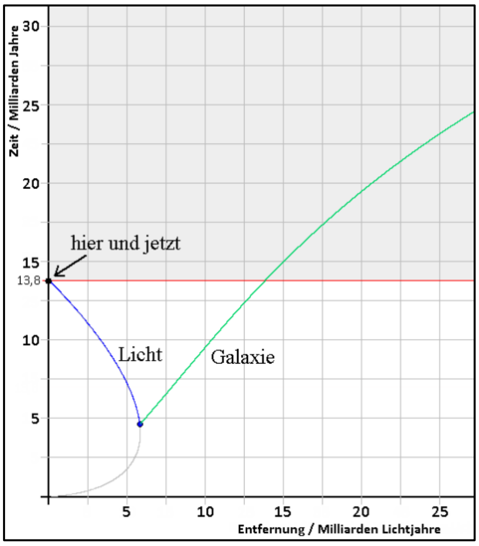
Das Raum-Zeit Diagramm

Das Computerprogramm „*Expansion.exe*“ stellt die Bahnen der Photonen und der Materie in einem Raum-Zeit Diagramm dar – so, wie in den oberen beiden Abbildungen bereits gezeigt wurde. Es ist dabei üblich, die physikalische Größe der Zeit auf die y-Achse zu legen. Vom didaktischen Standpunkt aus gesehen ist das nicht unbedingt günstig. So stellt beispielsweise eine größere Steigung einer Kurve eine kleinere Geschwindigkeit dar. Anders formuliert: Je flacher die Kurven, desto größer die Geschwindigkeiten. Das sind Schülerinnen und Schüler aus dem Physikunterricht von Zeit-Weg-Diagrammen genau andersherum gewöhnt. Wir wollen dennoch bei dieser etwas ungewöhnlichen Form der Abbildung bleiben, da sie in allen Publikationen zum Thema so verwendet wird. Auch in der Relativitätstheorie werden die Minkowski-Diagramme in dieser Art gestaltet.

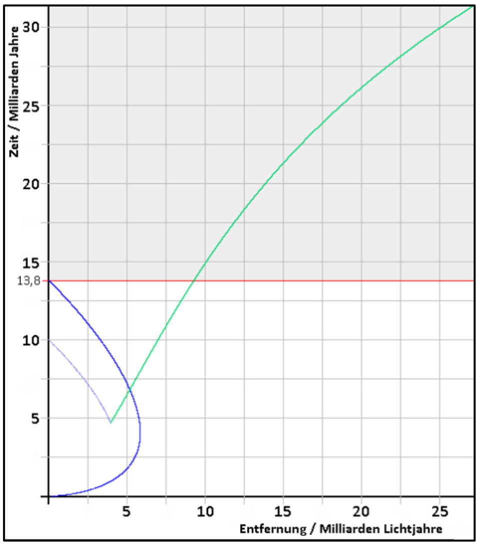
Im Folgenden wollen wir uns die Raum-Zeit Diagramme ein wenig genauer anschauen, denn sie bieten schöne Möglichkeiten, die Bewegung von Materie und Licht im expandierenden Universum darzustellen.

Welche Galaxien in der Raum-Zeit können wir heute sehen?

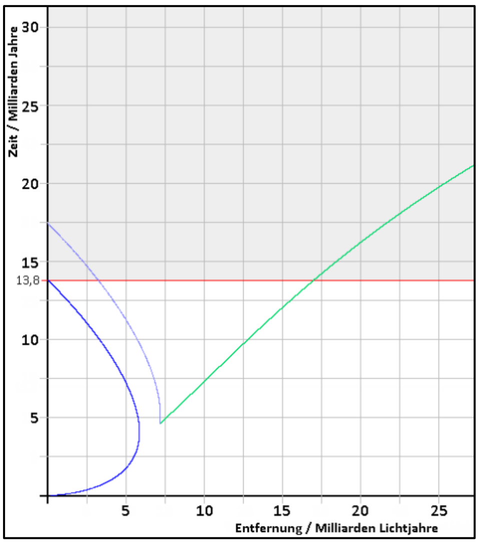
Diese Frage lässt sich mithilfe der im Diagramm dargestellten bogenförmigen Lichtkurve, die manchmal auch Lichtkegel (light cone) oder Vergangenheitskegel genannte wird, beantworten. Alle Galaxien, die auf dieser Lichtbirne liegen, sind für uns heute sichtbar, denn deren Photonen, die wir später registrieren können, laufen nach ihrer Aussendung genau auf dieser Bahn zum „hier und jetzt“. Die Galaxie nimmt im Raum-Zeit Diagramm aber einen anderen Weg. Wenn wir ihr Licht sehen, befindet sie sich bereits fast 14 Milliarden Lichtjahre von uns entfernt.



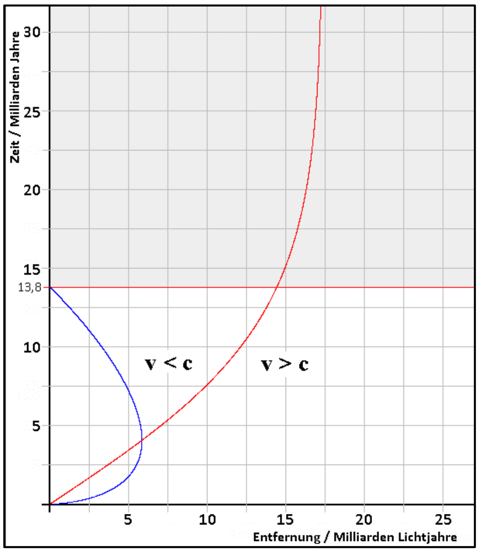
Eine Galaxie, die sich beispielsweise links vom Lichtkegel befindet, wenn sie die Photonen aussendet, ist für uns nicht in dem Zustand sichtbar, den sie bei der Emission hatte. Dieses Licht ist bereits vor etwa 3,8 Milliarden Jahren bei uns eingetroffen, denn es läuft auf einem früheren Lichtkegel. Erst wenn der Weg der Galaxie durch die Raum-Zeit unseren aktuellen Lichtkegel schneidet, wird die Galaxie für uns sichtbar, aber dann in dem Zustand, den sie dann bei Lichtemission aufwies.



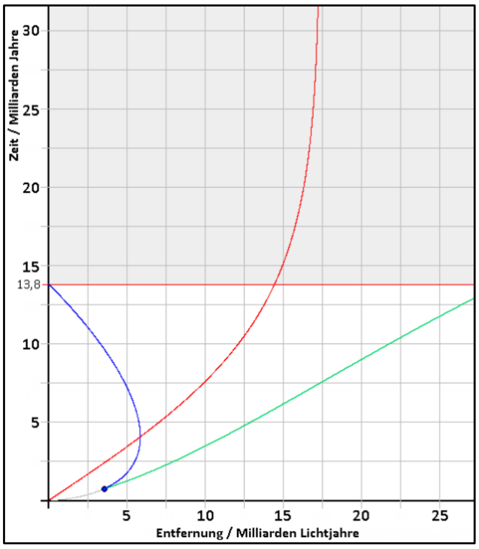
Eine Galaxie, die sich rechts vom Lichtkegel befindet, können wir ebenfalls nicht in dem Zustand sehen, den sie bei der Aussendung des Lichts an dieser Stelle hatte. Das Licht bewegt sich nämlich auf einem Lichtkegel, der zum zukünftigen Universum gehört. Erst in etwa 4 Milliarden Jahren würde das Licht bei uns eintreffen.



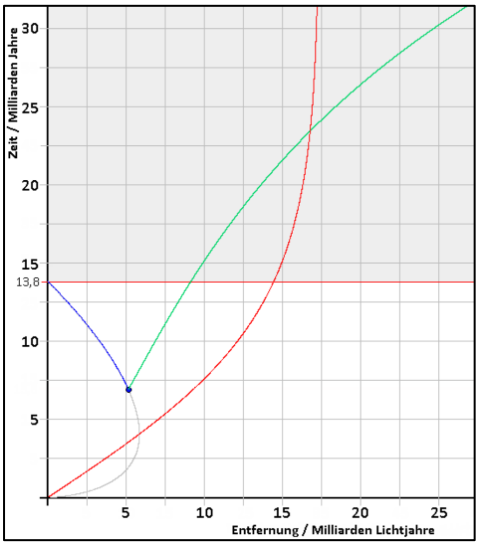
Die Hubble-Sphäre



Die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxien nimmt vom Beobachter aus betrachtet mit der Entfernung zu. Bei einer bestimmten Entfernung wird die Lichtgeschwindigkeit erreicht – dieser Abstand wird Hubble-Radius oder manchmal auch Hubble-Sphäre genannt. Auf unserem aktuellen Lichtkegel befindet sich dieser Punkt dort, wo die Kurve am weitesten nach rechts ausgebeult ist. Der Hubble-Radius wächst mit der Ausdehnung des Universums. Jeder Lichtkegel der Vergangenheit und jeder der Zukunft weist eine andere Stelle auf, an der die Expansionsgeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Der Hubble-Radius läuft daher im Diagramm auf einer Kurve, die den subluminaren (v < c) vom superluminaren (v > c) Raumbereich trennt.

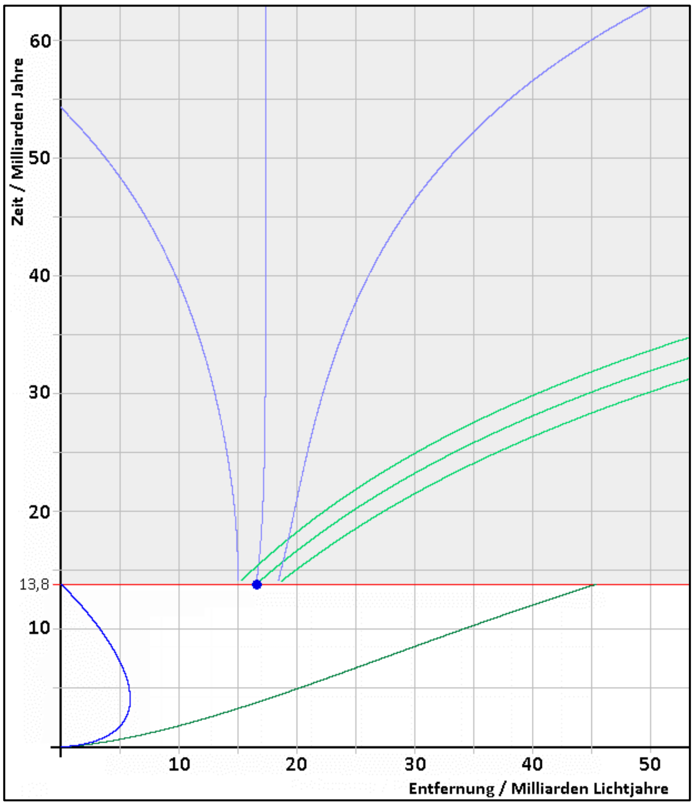


Alle Galaxien, die sich im superluminaren Bereich befinden, bewegen sich mit Überlichtgeschwindigkeit von uns weg. Photonen, die von ihnen zu uns gesendet werden, wandern zunächst von uns weg - solange, bis die Hubble-Sphäre sie wieder „eingefangen hat.



Galaxien im subluminaren Raum entfernen sich von uns mit Unterlichtgeschwindigkeit. Ihre Photonen bewegen sich bereits nach ihrer Emission direkt auf uns zu.

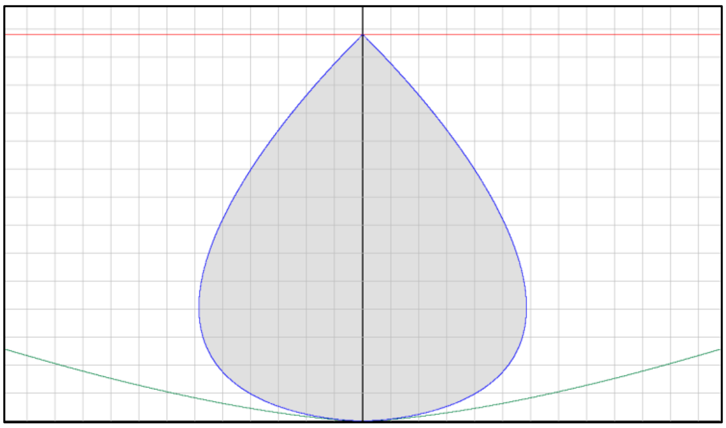
Der Ereignishorizont



Wir können nun fragen, wie weit dürfen Objekte zum heutigen Zeitpunkt von uns entfernt sein, damit wir sie (theoretisch) irgendwann in der Zukunft sehen könnten. Eine solche Entfernung wird Ereignishorizont genannt. Die Computersimulation vermag diese Beobachtungsgrenze anschaulich darzustellen. Auf der „Heute-Linie" im Raum-Zeit-Diagramm gibt es eine Position, bei der das Licht parallel zur Zeitachse (nach oben) läuft. Es kann also niemals unsere Position (y-Achse) erreichen. Rechts von dieser Position aber erst recht nicht. Befindet sich die Galaxie aber links von dieser speziellen Position, wird uns das Licht irgendwann (in dem abgebildeten Beispiel in etwa 40 Milliarden Jahren) erreichen, denn der Lichtkegel schließt sich wieder. Der Ereignishorizont (Startpunkt des Lichts) lässt sich im Programm ablesen – er beträgt 16,541 Milliarden Lichtjahre. Das Licht derjenigen Objekte, die heute eine kleinere Entfernung als diesen Ereignishorizont haben, werden wir also in naher oder auch sehr weiter Zukunft theoretisch empfangen können.

Die kosmische Träne

Wenn wir das Raum-Zeit-Diagramm an der y-Achse spiegeln, weist der Lichtkegel des ΛCDM-Universums eine Tropfenform auf. Daher wird diese Figur gerne als „The Cosmic Teardrop" bezeichnet – eine weniger wissenschaftliche Wortwahl - dafür aber umso poetischer.



Mathematischer ANHANG

Die Hyperbolischen Funktionen

Es gilt: $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Außerdem $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Für die Ableitung der Sinus-Hyperbolicus Funktion gilt: $(\sinh(x))' = \cosh(x)$.

Für die Ableitung der Kosinus-Hyperbolicus Funktion gilt: $(\cosh(x))' = \sinh(x)$.

Die Kotangens-Hyperbolicus definiert über: $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

Herleitung der Hubble-Funktion des ΛCDM-Modells

Die Skalenfunktion des ΛCDM-Modells lautet: $a(t) = \left(\dfrac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\sinh\left(1{,}5 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t\right)\right]^{\frac{2}{3}}$.

Der Hubble-Parameter ist definiert als $H(t) = \dfrac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ und beschreibt damit, wie sich die Änderungsgeschwindigkeit der Ausdehnung des Universums relativ zur momentanen Ausdehnung verhält. Wir bilden die erste Ableitung der Skalenfunktion. Dazu ist es günstiger, wenn wir die Skalenfunktion etwas übersichtlicher aufschreiben:

$a(t) = k \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{\frac{2}{3}}$ mit den Abkürzungen $k = \left(\dfrac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $\omega = 1{,}5 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda}$

Für die Ableitung verwenden wir die Kettenregel („innere Ableitung mal äußere Ableitung"):

$$\dot{a}(t) = k \cdot \omega \cdot \cosh(\omega \cdot t) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{-\frac{1}{3}} = k \cdot \frac{2}{3} \cdot \omega \cdot \cosh(\omega \cdot t) \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{-\frac{1}{3}}$$

Damit ergibt sich für den Hubble-Parameter:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{k \cdot \frac{2}{3} \cdot \omega \cdot \cosh(\omega \cdot t) \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{-\frac{1}{3}}}{k \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \omega \cdot \cosh(\omega \cdot t) \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{-\frac{1}{3}}}{\left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot\omega\cdot\cosh(\omega\cdot t)}{\left[\sinh(\omega\cdot t)\right]^{\frac{2}{3}}\cdot\left[\sinh(\omega\cdot t)\right]^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\omega\cdot\cosh(\omega\cdot t)}{\sinh(\omega\cdot t)} = \frac{2}{3}\cdot\omega\cdot\coth(\omega\cdot t)$$

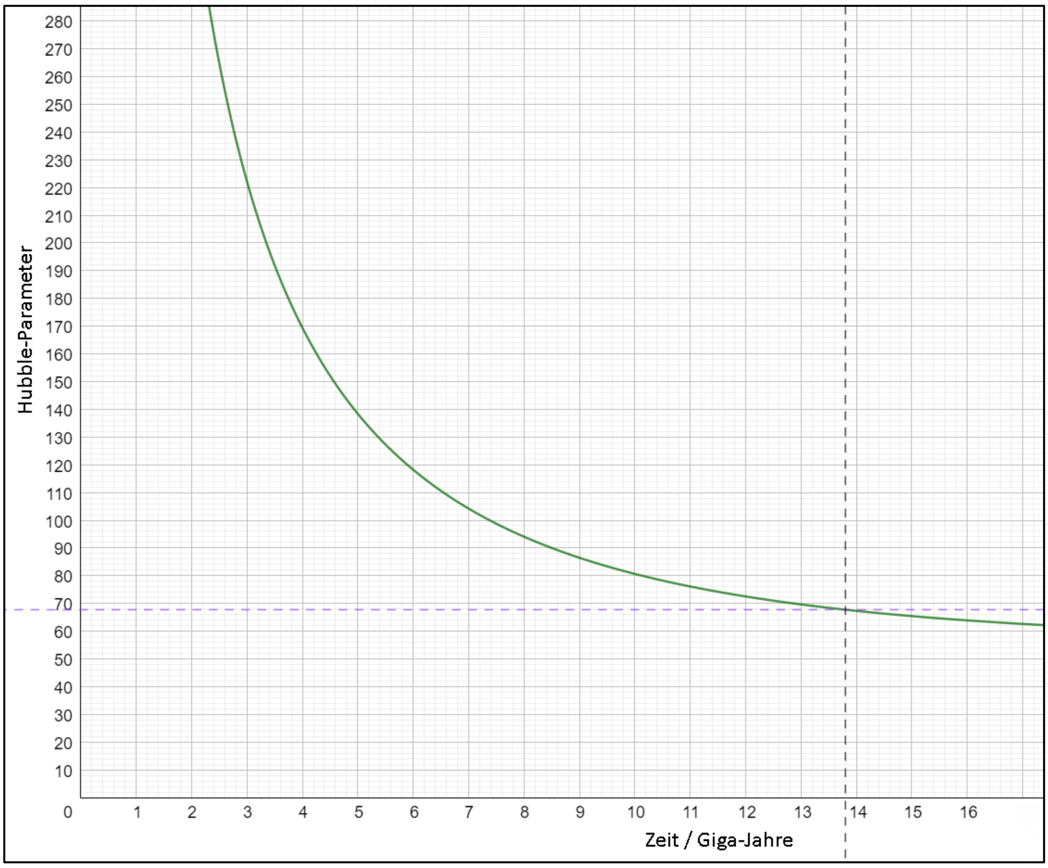
Wenn wir nun die Abkürzungen wieder rückgängig machen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} H(t) = \frac{2}{3}\cdot\omega\cdot\coth(\omega\cdot t) &= \frac{2}{3}\cdot 1{,}5\cdot H_0\cdot\sqrt{\Omega_\Lambda}\cdot\coth\left(1{,}5\cdot H_0\cdot\sqrt{\Omega_\Lambda}\cdot t\right) \\ &= H_0\cdot\sqrt{\Omega_\Lambda}\cdot\coth\left(1{,}5\cdot H_0\cdot\sqrt{\Omega_\Lambda}\cdot t\right) \end{aligned}$$

Ergebnis:
Der Hubble-Parameter ist zeitabhängig und folgt der Funktion:

$$\boxed{H(t) = H_0\cdot\sqrt{\Omega_\Lambda}\cdot\coth\left(1{,}5\cdot H_0\cdot\sqrt{\Omega_\Lambda}\cdot t\right)}$$

Wenn wir die Zeit in Giga-Jahren (GY) und die Hubble-Konstante entsprechend in 1/GY skalieren, nimmt H_0 den Wert $H_0 = 67{,}74\frac{\text{km}}{\text{s}\cdot\text{Mpc}} = 0{,}0692785\frac{1}{\text{GY}}$ an. Für den dimensionslosen Dichteparameter gilt nach wie vor: $\Omega_\Lambda = 0{,}6911$. Damit lässt sich die Hubble-Funktion z.B. mit der Mathematik-Software GeoGebra zeichnen (H_0 vor dem Kotangens in üblichen Einheiten):



Der Hubble-Parameter nähert sich für große Werte von t einem Grenzwert an, den wir berechnen wollen. Dazu drücken wir den Kotangens-Hyperbolicus mithilfe der e-Funktion aus:

$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Wenn wir die Division ausführen ergibt sich:

$\left(e^x + e^{-x}\right) : \left(e^x - e^{-x}\right) = 1 + \frac{2 \cdot e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Lassen wir nun x gegen Unendlich laufen, geht der Zähler im letzten Term gegen Null, der Nenner gegen Unendlich und insgesamt läuft der Bruch gegen Null. Daher gilt:

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(\coth(x)\right) = 1$.

Der Hubble-Parameter geht dann gegen:

$$H(\infty) = H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} = 67{,}74 \frac{km}{s \cdot Mpc} \cdot \sqrt{0{,}6911} = 56{,}314 \frac{km}{s \cdot Mpc}$$

Anpassung der Skalenfunktionen

Wir haben zwei Skalenfunktionen kennengelernt:

Skalenfunktion des EdS-Modells: $a(t) = \left(\frac{3}{2} \cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$

Skalenfunktion des ΛCDM-Modells: $a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\sinh\left(1{,}5 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t\right)\right]^{\frac{2}{3}}$

Die letztere sollte für $\Omega_m = 1$ und $\Omega_\Lambda = 0$ in die erste übergehen. Dies lässt sich allerdings nicht dadurch zeigen, dass wie $\Omega_\Lambda = 0$ einsetzen, da wir sonst durch Null dividieren würden. Also lassen wir $\Omega_\Lambda \to 0$ gegen Null laufen. Aber dann würde der Vorfaktor gegen Unendlich und der Sinus Hyperbolicus gegen Null laufen und wir können nicht erkennen, ob es einen Grenzwert (Grenzfunktion) gibt, bzw. welchen Wert dieser hat. Das Problem lässt sich dadurch lösen, indem wir $f(x) = \sinh(x)$ durch die Tangente bei x=0 ersetzen. In der Nähe von Null (das wollen wir ja) ist das eine sehr gute Näherung. Die Tangentengleichung (Taylorpolynom ersten Grades für x=0): $t(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$. Es gilt: $f(0) = \sinh(0) = 0$ und $f'(0) = \cosh(0) = 1$. Damit lautet die Tangente: $t(x) = 1 \cdot x + 0$, also $t(x) = x$. Das bedeutet, wir können den Sinus-Hyperbolicus in der Nähe von Null durch sein Argument ersetzen: $\left[\sinh\left(1{,}5 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t\right)\right]^{\frac{2}{3}} \approx \left[\cdot\sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t\right]^{\frac{2}{3}} = \Omega_\Lambda^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1{,}5 \cdot H_0 \cdot t\right)^{\frac{2}{3}}$. Multiplizieren wir noch den

Vorfaktor dazu, ergibt sich: $a(t) \approx \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \Omega_\Lambda^{\frac{1}{3}} \cdot (1{,}5 \cdot H_0 \cdot t)^{\frac{2}{3}} = \Omega_m^{\frac{1}{3}} \cdot (1{,}5 \cdot H_0 \cdot t)^{\frac{2}{3}}$ und mit

$\Omega_m = 1$ erhalten wir schließlich $a(t) \approx \left(\frac{3}{2} \cdot H_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$.

Damit haben wir gezeigt, dass sich die Skalenfunktion des EdS-Universums aus der Skalenfunktion des ΛCDM-Universums entwickeln lässt, wenn wir die Dunkle Energie verschwinden lassen und ein rein materiedominiertes Universum annehmen.

Der Wendepunkt der Skalenfunktion des ΛCDM-Modells

Die Wendestelle der Funktion $a(t) = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\sinh\left(1{,}5 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot t\right)\right]^{\frac{2}{3}}$ gibt uns den Zeitpunkt an, bei dem das Universum von der gebremsten in die beschleunigte Expansion übergegangen ist. Diesen Wendepunkt berechnen wir mithilfe der zweiten Ableitung von a(t).

Wir schreiben die Skalenfunktion zunächst wieder übersichtlicher auf:

$a(t) = k \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{\frac{2}{3}}$ mit den Abkürzungen $k = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $\omega = 1{,}5 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda}$

Für die Ableitung verwenden wir die Kettenregel:

$$\dot{a}(t) = k \cdot \omega \cdot \cosh(\omega \cdot t) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{-\frac{1}{3}} = k \cdot \frac{2}{3} \cdot \omega \cdot \cosh(\omega \cdot t) \cdot \left[\sinh(\omega \cdot t)\right]^{-\frac{1}{3}}$$

Für die zweite Ableitung müssen wir zudem noch die Produktregel bemühen:

$$\ddot{a}(t) = k \cdot \frac{2}{3} \cdot \omega \cdot \left[\omega \cdot \sinh(\omega \cdot t) \cdot \sinh^{-\frac{1}{3}}(\omega \cdot t) - \omega \cdot \cosh(\omega \cdot t) \cdot \frac{1}{3} \cdot \sinh^{-\frac{4}{3}}(\omega \cdot t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)\right]$$

$$= k \cdot \frac{2}{3} \cdot \omega^2 \cdot \sinh^{\frac{2}{3}}(\omega \cdot t) \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \sinh^{-2}(\omega \cdot t) \cosh^2(\omega \cdot t)\right] = 0 \text{ (notw.Bedingung)}$$

$$\rightarrow \quad 1 - \frac{1}{3} \cdot \sinh^{-2}(\omega \cdot t) \cosh^2(\omega \cdot t) = 0$$

$$1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\cosh^2(\omega \cdot t)}{\sinh^2(\omega \cdot t)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{3} \cdot \coth^2(\omega \cdot t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \coth(\omega \cdot t) = \sqrt{3}$$

Wir wenden die Gegenfunktion vom Kotangens-Hyperbolicus an und erhalten:

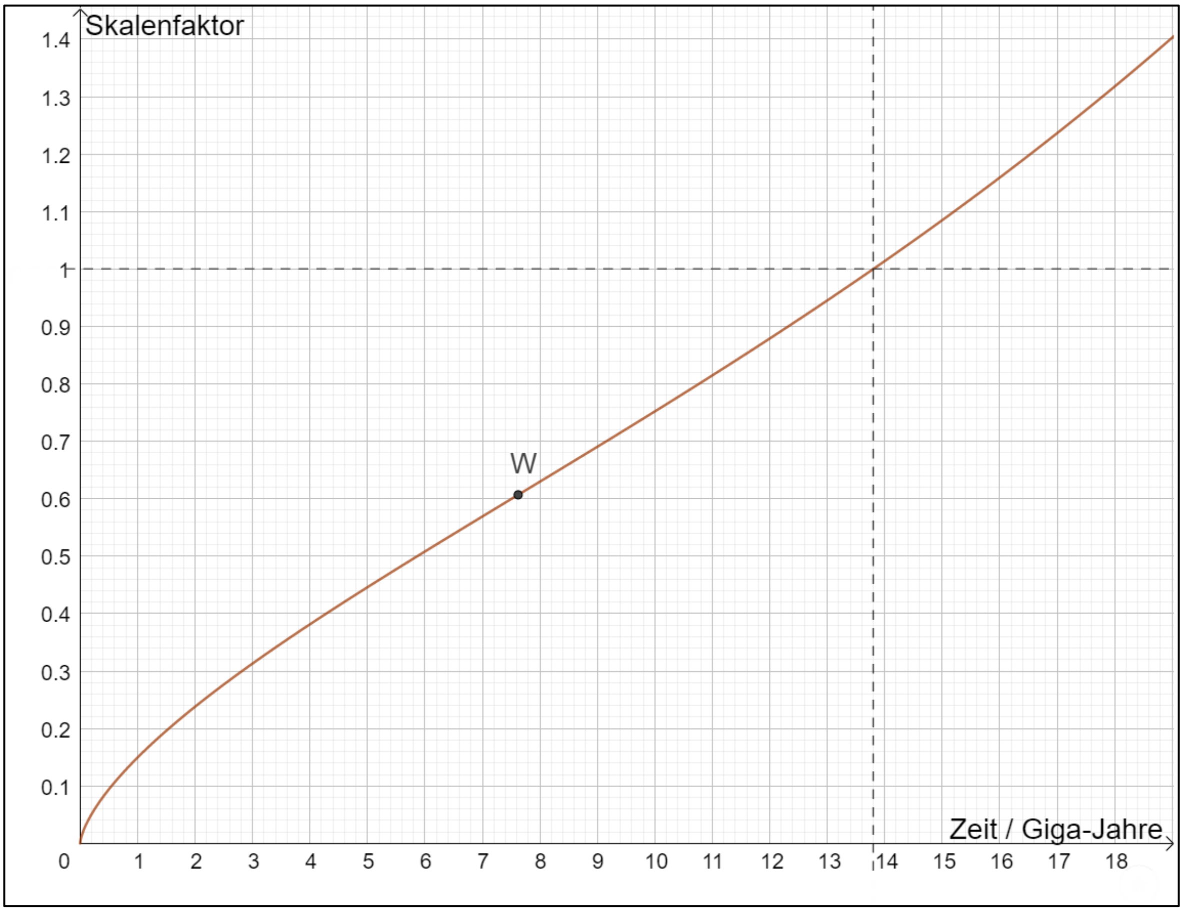
$$\omega \cdot t = \coth^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \iff t = \frac{\coth^{-1}\left(\sqrt{3}\right)}{\omega} = \frac{\coth^{-1}\left(\sqrt{3}\right)}{1{,}5 \cdot H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}}$$

$$= \frac{\coth^{-1}\left(\sqrt{3}\right)}{1{,}5 \cdot 0{,}0692785 \cdot \sqrt{0{,}6911}} = 7{,}62222168$$

Die Wendestelle, an der die gebremste in eine beschleunigte Expansion übergeht, befindet sich bei 7,622 Milliarden Jahren nach dem Urknall.

Der Wechsel der Expansionsdynamik fand also vor etwa 6,2 Milliarden Jahren statt.

Der Wert der Skalenfunktion an dieser Stelle beträgt $a(7{,}662) = 0{,}60686$.
Das heißt, das Universum hatte zu diesem Zeitpunkt etwa 60% seiner heutigen Größe erreicht.



Lösung einer Differentialgleichung

Bei der Herleitung der Skalenfunktion des ersten Expansionsmodells, hatten wir eine Differentialgleichung durch Separation der Variablen gelöst (Seite 7). Hier soll ein weiterer mathematischer Weg gezeigt werden, der die partielle Integration verwendet.

Wir gingen aus von der Beziehung: $v^2 \cdot r = 2 \cdot G \cdot M \Leftrightarrow v \cdot \sqrt{r} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M}$. Wir schreiben $v(t) = \dot{r}(t)$ und erhalten die Differentialgleichung $\dot{r}(t) \cdot \sqrt{r(t)} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M}$.

Wir Integrieren beide Seiten: $\int^{t} \dot{r}(t) \cdot \sqrt{r(t)}\, dt = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot \int_0^{t} dt$

$$\int^{t} \dot{r}(t) \cdot \sqrt{r(t)}\, dt = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot t$$

Das linke Integral lösen wir durch partielle Integration:

$\int_0^t \dot{r} \cdot \sqrt{r}\, dt = r \cdot \sqrt{r} - \int_0^t r \cdot \dot{r} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{r}} dt$, denn es gilt $\left(\sqrt{r(t)}\right)^{\bullet} = \dot{r}(t) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{r(t)}}$

$\int_0^t \dot{r} \cdot \sqrt{r}\, dt = r \cdot \sqrt{r} - \frac{1}{2} \int_0^t \dot{r} \cdot \sqrt{r}\, dt$, das rechte Integral nach links addieren ($+\frac{1}{2} \int_0^t \dot{r} \cdot \sqrt{r}\, dt$)

$$\frac{3}{2} \int_0^t \dot{r} \cdot \sqrt{r}\, dt = r \cdot \sqrt{r} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^t \dot{r} \cdot \sqrt{r}\, dt = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \sqrt{r}$$

Also wird aus dem oberen Ansatz $\int^{t} \dot{r}(t) \cdot \sqrt{r(t)}\, dt = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot t$ nun

$$\frac{2}{3} \cdot r \cdot \sqrt{r} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot t \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}}(t) = \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot t$$

$\Leftrightarrow \quad r(t) = \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot G \cdot M} \cdot t \right)^{\frac{2}{3}}$, was genau dem Ergebnis entspricht, was durch die Separation der Variablen erreicht wurde.

ANHANG: Nützliche Hinweise

Entfernungen gibt es viele

Möchte man Entfernungen von weit entlegenen Lichtquellen im Universum nennen, ist es unerlässlich anzugeben, welche Art von Entfernungsangaben man verwendet. Es kann die Entfernung sein, die das Objekt zum Zeitpunkt der Lichtaussendung hatte, oder diejenige, die es eingenommen hat, wenn das Licht bei uns eintrifft. Erstere wird „Emissionsentfernung“ genannt, die andere „Empfangsentfernung (reception distance)“. Darüber hinaus tauchen noch Begriffe wie „Winkelentfernung“ und „Leuchtkraftentfernung“ auf. Besonders die Leuchtkraftentfernung wird häufig bei der Entfernungsangabe von Galaxien, Quasaren oder Supernovae verwendet. Daher eine kurze Erklärung, was sich unter diesem Begriff verbirgt:

Die Photonen, die von der weit entfernten Lichtquelle ausgesendet werden, durchlaufen einen sich ausdehnenden Raum. Dadurch kommen Sie bei uns nicht in der zeitlichen Abfolge an, wie sie ausgesendet wurden, sondern zeitlich gestreckt. Pro Zeiteinheit empfangen wir daher weniger Photonen, als man bei einer statischen Situation erwarten würde. Der empfangene Lichtstrom ist daher geschwächt – die Quelle erscheint im Verhältnis zu nahen Vergleichssternen dunkler (weiter entfernt). Die Expansion des Raumes lässt sich durch die Rotverschiebungsformel ausdrücken: $z+1=\frac{r(t_b)}{r(t_e)}=\frac{\lambda(t_b)}{\lambda(t_e)}$, wobei t_e der Zeitpunkte der Emission und t_b der Zeitpunkt der Beobachtung bedeuten. Wenn wir die Rate an Photonen pro Zeiteinheit als eine Art Frequenz deuten, können wir auch schreiben:

$$\frac{\lambda(t_b)}{\lambda(t_e)}=\frac{}{f(t_b)}=z+1 \quad \rightarrow \quad f(t_b)=\frac{f(t_e)}{z+1}.$$

Die Rate an Photonen, die den Lichtstrom beim Empfang bestimmt, ist also um den Faktor 1/(z+1) geschwächt. Daher ist die Leuchtkraftentfernung (z+1) -mal so groß, wie die Empfangsentfernung. Es gilt also $d_{\text{Leuchtkraft}}=(z+1)\cdot d_{\text{reception distance}}$.

Ein Beispiel:

Auf Seite 30 hatten wir mithilfe des Computerprogramms „*Expansion.exe*“ die Bahnen der Supernova SN 1997ck (Rotverschiebung z=0,97) und deren Licht im Raum-Zeit Diagramm dargestellt. Wir konnten ablesen, dass die Galaxie ihr Licht, das wir heute sehen, vor etwa 6 Milliarden Jahre nach dem Urknall (also vor etwa 7,8 Milliarden Jahren) aussendete. Damals war die Galaxie 5,5 Milliarden Lichtjahre von uns entfernt. Das ist die Emissionsentfernung. Heute hat sie eine Entfernung von etwa 10,8 Milliarden Lichtjahre, was wir als Empfangsentfernung bezeichnen. Die Leuchtkraftentfernung beträgt dann:

$$d_{LK}=(z+1)\cdot d_{rd}=1{,}97\cdot 10{,}8\ \text{GLJ}\approx 21{,}3\,\text{Milliarden Lichtjahre.}$$

Scheinbare und absolute Helligkeiten

Ein Stern (oder eine andere Strahlungsquelle) strahlt die Leistung **P** in alle Richtungen (kugelförmig) ab. In der Entfernung **d** empfangen wir davon den Strahlungsstrom $S = \frac{P}{4\pi \cdot d^2}$.

Diesen Strahlungsstrom empfinden mir mit unserem Auge als scheinbare Helligkeit **m** des Sterns. Die absolute Helligkeit **M** des Sterns ist seine scheinbare Helligkeit, die er in einem Abstand von d_M=10 pc (32,6 LJ) von uns hätte.

Die Differenz dieser beiden scheinbaren Helligkeiten nennt man Entfernungsmodul. Es gilt

$$m - M = -2{,}5 \cdot \log\left(\frac{S}{S_M}\right) = -2{,}5 \cdot \log\left(\frac{\frac{P}{4\pi \cdot d^2}}{\frac{P}{4\pi \cdot d_M^2}}\right) = -2{,}5 \cdot \log\left(\left(\frac{d_M}{d}\right)^2\right)$$ und unter Anwendung der Logarithmusgesetze ergibt sich:

$$m - M = 2{,}5 \cdot \log\left(\left(\frac{d}{d_M}\right)^2\right) = 5 \cdot \log\left(\frac{d}{d_M}\right)$$ und mit d_M = 10pc:

$$m - M = 5 \cdot \log\left(\frac{d}{10}\right) = 5 \cdot (\log(d) - \log(10)) = 5 \cdot (\log(d) - 1)$$

Das bedeutet: Die Differenz von scheinbarer zur absoluten Helligkeit hängt nur vom Abstand d der beobachteten Quelle ab. Diese Entfernung wird auch **Leuchtkraft-Entfernung** genannt.

$\boxed{m - M = 5 \cdot (\log(d_{LK}) - 1)}$ umgeformt nach d_L ergibt die Leuchtkraftentfernung:

$\boxed{d_{LK} = 10^{\frac{m-M}{5}+1}}$ in der Längeneinheit Parsec.

Beispiel: Supernova SN 1997ck (Rotverschiebung z=0,97).

Die absolute Helligkeit einer Supernova 1a (also in einer Entfernung von 10 pc) beträgt stets: M = -19,3 mag. Die scheinbare Helligkeit (im Maximum, B-Filter) der Supernova SN 1997ck wurde gemessen und weist einen Wert von m = 24,78 mag (Magnituden) auf.

Damit ergibt sich eine Leuchtkraftentfernung von:

$$d_{LK} = 10^{\frac{24{,}78+19{,}3}{5}+1} = 10^{9{,}816}\ \mathrm{pc} = 6{,}546362 \cdot 10^9\ \mathrm{pc} = 21{,}35135 \cdot 10^9\ \mathrm{Lj}$$

Das bedeutet, dass die Leuchtkraftentfernung der Supernova SN 1997ck etwa 21,35 Milliarden Lichtjahre beträgt. Die Entfernung, welche die Supernova beim Eintreffen „wirklich" hat, nennen wir Empfangsentfernung (reception distance). Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen hatten ergibt sich diese Angabe aus: $d_{rd} = \frac{d_L}{z+1} = \frac{21,35135 \cdot 10^9 \text{ Lj}}{1,97} = 10,83825 \cdot 10^9 \text{ Lj}$.

Formal hängt die Leuchtkraftentfernung übrigens folgendermaßen mit der Rotverschiebung z zusammen:

$d_{LK}(z) = \frac{c}{H_0} \cdot (z+1) \cdot \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m \cdot (x+1)^3 + \Omega_\Lambda}}$, wobei die Parameter Ω_m und Ω_Λ entsprechend dem verwendeten Modell gewählt werden müssen.

Für $\Omega_m = 1$ und $\Omega_\Lambda = 0$ (EdS-Modell) lässt sich das Integral analytisch lösen. Dann ergibt sich die Formel: $d_{LK}(z) = 2 \cdot \frac{c}{H_0} \cdot \left(z+1 - \sqrt{z+1}\right)$.

Für die Parameter des ΛCDM-Modells lässt sich das Integral allerdings nur mit numerischen Methoden berechnen, z.B. mithilfe einer geeigneten Mathematik-Software.

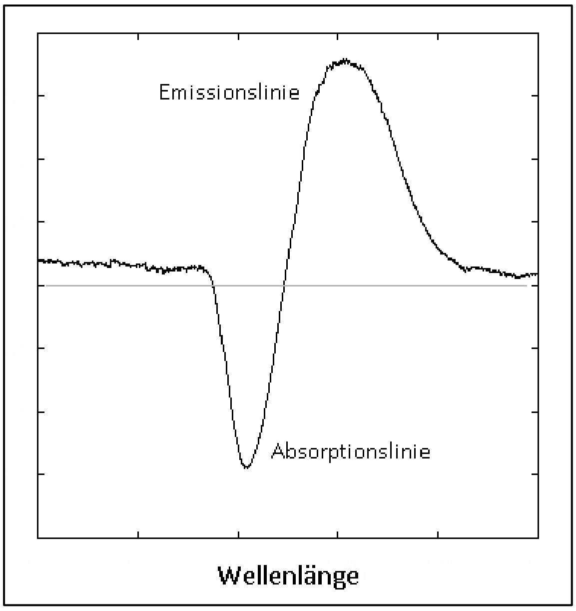
Die Kurven, die den Zusammenhang zwischen der scheinbaren Helligkeit und der Rotverschiebung in den Diagrammen auf den Seiten 21 und 26 darstellen, ergeben sich dann mit Hilfe der Formel:

$$m(z) = 5 \cdot \left(\log\left(d_{LK}(z)\right) - 1\right) + M,$$

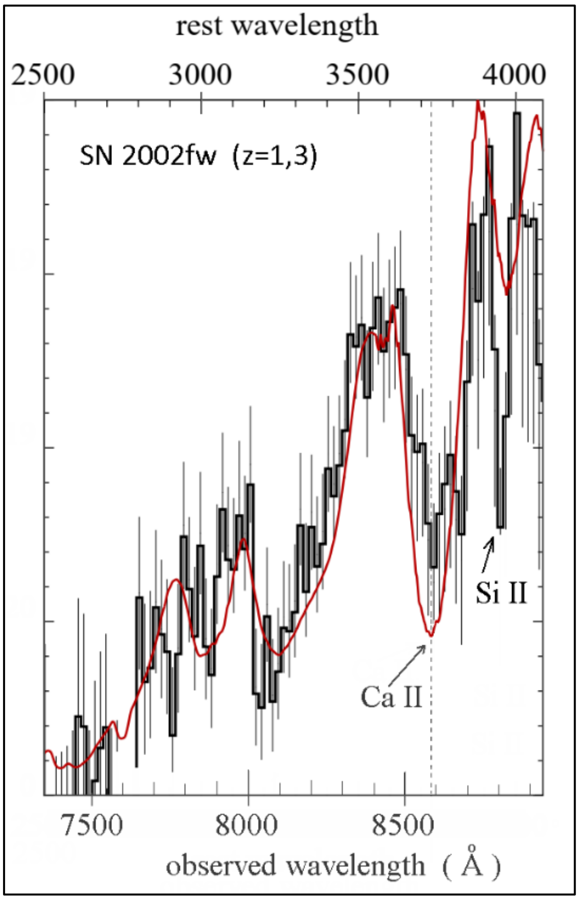
wobei $d_{LK}(z)$ die oben besprochenen Funktionen darstellt. M ist die absolute Helligkeit, die bei Supernovae 1a stets einen Wert von M = -19,3 Magnituden aufweist.

Die Blauverschiebung der Kalziumlinien H&K

In vielen Spektren der Supernovae vom Typ 1a ist eine Absorptionslinie des Elements Kalzium besonders deutlich zu erkennen. Es handelt sich um die Ca II – Linie, die eigentlich eine Doppellinie ist und in der Notation der Fraunhofer-Linien als H&K-Linien bezeichnet werden. Die Wellenlängen sind 3934 Å und 3968 Å. Normalerweise sind die Linien in Supernovae-Spektren nicht zu trennen, so dass wir im Weiteren den Mittelwert von 3951 Å betrachten.



Erstaunlicherweise wird die Ruhewellenlänge dieser Linie in den Spektren der Supernovae aber mit Werten angegeben, die im Bereich von 3750 Å liegen. Was ist der Grund für diese Verschiebung der Absorptionslinie in den blauen Spektralbereich?



Es handelt sich um eine Spektrallinie mit einem sogenannten P-Cygni-Profil. Der Supernova-Ausbruch erzeugt im Bereich der Explosion eine starke Kalzium Emissionslinie. Bei der Ausbreitung des Lichts vom Zentrum der Supernova durchläuft das Licht einige Tage nach dem Ausbruch die Gasmassen, die mit großer Geschwindigkeit von der Explosion in den Raum getrieben werden. Das Licht, das wir empfangen, hat also heiße Gase durchlaufen, die sich auf uns zu bewegen. Die Absorptionslinie erscheint daher in den blauen Bereich des Spektrums verschoben. Daher sieht man im Spektrum sowohl die Emissions- als auch die verschobene Absorptionslinie.

Die Emissionslinie des Kalziums ist in den Supernovae-Spektren meistens nur undeutlich zu erkennen, da sie oft von der Absorptionslinie des Siliziums (Si II) mit einer Wellenlänge von 4120 Å überlagert wird, die nämlich auch blauverschoben ist und nicht bei 4120 Å sondern im Bereich von 3920 Å erscheint und damit die Emissionslinie des Kalziums stark überlagert.

Wir können anhand der Verschiebung der Linien abschätzen, mit welcher Geschwindigkeit sich die Explosionswolke der Supernova einige Tage nach ihrem Ausbruch ausdehnt. Die Blauverschiebung wurde hier nämlich durch den Dopplereffekt verursacht. Wir benutzen die Näherungsformel $\lambda_{\text{Abs}} = \lambda_{\text{Emi}} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ und lösen nach v auf:

$$v = \left(1 - \frac{\lambda_{\text{Abs}}}{\lambda_{\text{Emi}}}\right) \cdot c = \left(1 - \frac{3750}{3951}\right) \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 15\,262\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \quad .$$

Diese Abschätzung liefert also eine Geschwindigkeit von etwa 15 000 km/s. Das sind etwa 5% der Lichtgeschwindigkeit.