Die Rotation von Sternen

Matthias Borchardt

Sterne können erhebliche Rotationsgeschwindigkeiten aufweisen, was zu einer starken **Deformation der Sternoberfläche** führt – diese Sterne erscheinen nicht mehr kugelförmig, sondern gleichen eher einem Rotationsellipsoid. Besonders interessant sind in diesem Zusammenhang Be-Sterne. Diese sehr heißen, massereichen Hauptreihensterne der Spektralklasse B weisen in ihren Spektren markante Emissionslinien (v.a. Wasserstofflinien) auf, die durch eine dünne, zirkumstellare Gasscheibe um den Äquator erzeugt werden. Diese Gasscheibe entsteht bei schnell rotierenden BE-Sternen, wenn die Rotation kritische Werte annimmt und der Stern aufgrund der Zentrifugalkräfte droht, auseinandergerissen zu werden.

Das *Roche-Modell* der Sternenoberfläche

Die geometrische Form des Rotationskörpers wird durch das „effektive Potential" bestimmt, das sich aus dem Gravitationspotential und dem Zentrifugalpotential zusammensetzt und sich in sphärischen Koordinaten durch

$$\Phi_{\text{eff}}\left(R,\vartheta,\varphi\right) = -\frac{G\cdot M}{R} - \frac{1}{2}\cdot\omega^2\cdot R^2\cdot\sin^2\left(\vartheta\right)$$

darstellen lässt. Das effektive Potential ist aufgrund der Rotationssymmetrie zur z-Achse unabhängig vom Azimutwinkel φ. Die Sternoberfläche ist in einem hydrostatischen Gleichgewicht, wenn dort überall dasselbe Potential herrscht, wobei hier das Potential der Pole angesetzt wird, weil dort der Zentrifugalanteil entfällt. Dies führt zu der Gleichung

$$-\frac{G\cdot M}{R} - \frac{1}{2}\cdot\omega^2\cdot R^2\cdot\sin^2\left(\vartheta\right) = -\frac{G\cdot M}{R_{\text{Pol}}}$$

Für jeden Polarwinkel ϑ (und Azimutwinkel φ) ergibt diese Gleichung einen Radius r und damit alle Punkte der Sternoberfläche, wobei die Gleichung in skalierter Form mit Hilfe der *Cardanischen Formel* für ganzrationale Funktionen dritten Grades oder trigonometrisch gelöst werden kann. Eine zentrale Rolle bei den weiteren Überlegungen spielt die „kritische Winkelgeschwindigkeit" ω_k, die dann erreicht wird, wenn der Stern aufgrund der extremen Rotation vor dem Zerreißen steht.

Die kritische Winkelgeschwindigkeit ω_k

Am Äquator ($\vartheta = 90°$) des rotierenden Sterns herrscht dasselbe Potential wie an den Polen, also $\Phi_{eq} = \Phi_{Pol}$. Der Zentrifugalterm ist an den Polen null, sodass sich die Gleichung

$$\frac{G\cdot M}{R_{eq}} + \frac{1}{2}\omega_k^2\cdot R_{eq}^2 = \frac{G\cdot M}{R_{Pol}} + 0$$

ergibt.

Die Winkelgeschwindigkeit ω_k erhalten wir zunächst aus dem Ansatz:

Die **kritische Rotation** ist erreicht, wenn die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator dort den Wert der Gravitationsbeschleunigung erreicht: $\omega_k^2 \cdot R_{eq} = \frac{G \cdot M}{R_{eq}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_k = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R_{eq}^3}}$

Eingesetzt in die obere Potentialgleichung: $\frac{G \cdot M}{R_{eq}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M}{R_{eq}^3} \cdot R_{eq}^2 = \frac{G \cdot M}{R_P} \quad | : GM \; | \cdot R_{Pol}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{R_{Pol}}{R_{eq}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{Pol}}{R_{eq}} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{2} \cdot \frac{R_{Pol}}{R_{eq}} = 1 \;\Leftrightarrow\; R_{eq} = \frac{3}{2} \cdot R_{Pol}$$

Wenn ein Stern die kritische Rotation erreicht, ist der Radius am Äquator genau 1,5-mal so groß wie der Radius an den Polen. $\boxed{R_{eq} = 1{,}5 \cdot R_{Pol}}$.

Eingesetzt in $\omega_k = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R_{eq}^3}}$ ergibt das die Formel für die **kritische Winkelgeschwindigkeit** bezogen auf den Polradius R_{Pol} $\boxed{\omega_k = \sqrt{\frac{8}{27} \cdot \frac{G \cdot M}{R_{Pol}^3}}}$.

Die kritische Geschwindigkeit (Rotationsgeschwindigkeit am Äquator):

$$v_k = \omega_k \cdot R_{eq} = \omega_k \cdot \frac{3}{2} \cdot R_{Pol} = \sqrt{\frac{8}{27} \cdot \frac{G \cdot M}{R_{Pol}^3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot R_{Pol} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{G \cdot M}{R_{Pol}}}$$

Also: $\boxed{v_k = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{G \cdot M}{R_{Pol}}}}$

Skalierung des effektiven Potentials

$$\Phi_{eff}(R, \vartheta, \varphi) = -\frac{G \cdot M}{R} - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot R^2 \cdot \sin^2(\vartheta)$$

Skalierung: $r = \frac{R}{R_{Pol}}$ und $\omega_{frac} = \frac{\omega}{\omega_k}$

Daraus erhalten wir $R = r \cdot R_{Pol}$ und mit $\omega_k^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{G \cdot M}{R_{Pol}^3}$ gilt $\omega^2 = \omega_{frac}^2 \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{G \cdot M}{R_{Pol}^3}$.

Einsetzen in die Potentialgleichung ergibt:

$$\Phi_{eff} = -\frac{G\cdot M}{r\cdot R_{Pol}} - \frac{1}{2}\cdot\omega_{frac}^2\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{G\cdot M}{R_{Pol}^3}\cdot r^2\cdot R_{Pol}^2\cdot\sin^2(\vartheta)$$

Das effektive Potential in skalierter Form ist:

$$\boxed{\Phi_{eff} = -\frac{G\cdot M}{R_{Pol}}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot r^2\cdot\sin^2(\vartheta)\right)} \quad \text{mit } r=\frac{R}{R_{Pol}} \text{ und } \omega_{frac}=\frac{\omega}{\omega_k}$$

Berechnung der Oberflächengeometrie des rotierenden Sterns

Die Sternoberfläche ist in einem hydrostatischen Gleichgewicht, wenn dort überall dasselbe Potential herrscht, wobei hier das Potential der Pole angesetzt wird:

$$-\frac{G\cdot M}{R_{Pol}} = -\frac{G\cdot M}{R_{Pol}}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot r^2\cdot\sin^2(\vartheta)\right)$$

Dies führt zu:

$$1 = \frac{1}{r} + \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot r^2\cdot\sin^2(\vartheta) \;\big|\cdot r$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot\sin^2(\vartheta)\cdot r^3 - r + 1 = 0 \quad \text{und mit } a=\frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot\sin^2(\vartheta) \text{ ergibt sich die kubische Gleichung } \boxed{a\cdot r^3 - r + 1 = 0}$$

Die sogenannte „trigonometrische Lösung“ einer solchen Gleichung lautet

$$r=\sqrt{\frac{4}{3\cdot a}}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\arccos\left(-\sqrt{\frac{27}{4}\cdot a}\right)+\frac{4\cdot\pi}{3}\right) \quad \text{und mit } a=\frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot\sin^2(\vartheta) \text{ ist das}$$

$$\boxed{r=\frac{3}{\omega_{frac}\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\arccos\left(-\omega_{frac}\cdot\sin(\vartheta)\right)+\frac{4\cdot\pi}{3}\right)}$$

Bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit ω_{frac} ergibt diese Formel für jeden Winkel ϑ einen Radius r (skaliert in Einheiten des Polradius) und mithilfe der Umrechnung

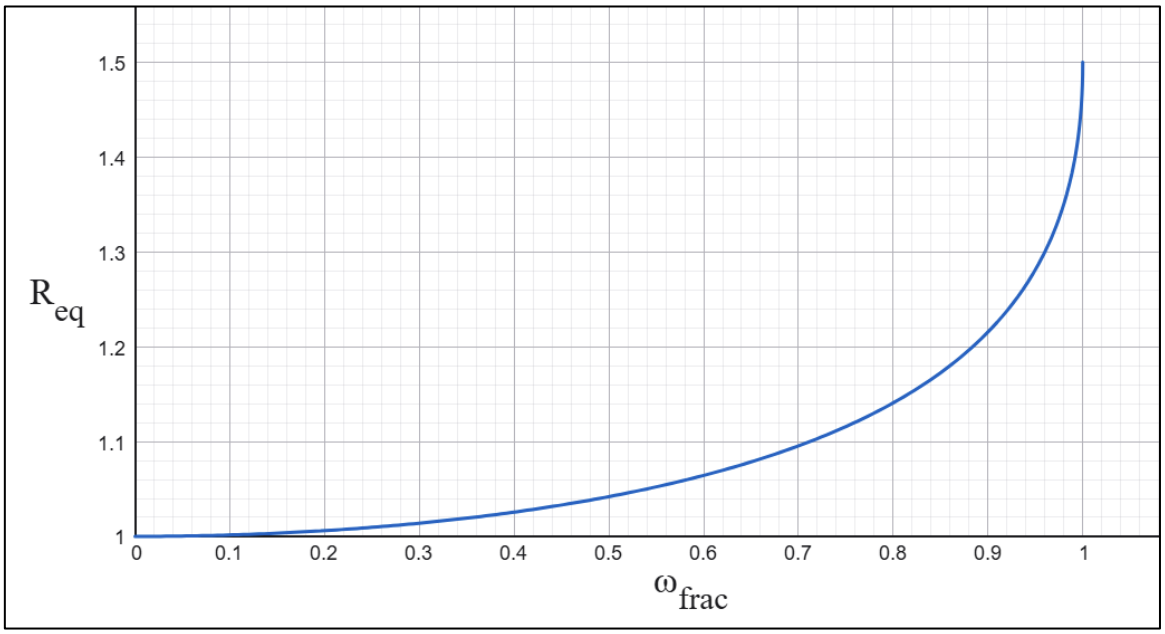
$$x = r\cdot\sin(\vartheta)\cdot\cos(\varphi)$$
$$y = r\cdot\sin(\vartheta)\cdot\sin(\varphi)$$
$$z = r\cdot\cos(\vartheta)$$

somit **alle Punkte der dreidimensionalen Sternenoberfläche** im kartesischen Koordinatensystem, wenn teta und phi schrittweise die Winkelwerte durchlaufen.

Der **Äquatorradius** R_{eq} des Sterns ergibt sich, wenn wir $\vartheta = 90°$ (bzw. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$) setzen:

$$R_{eq} = \frac{3}{\omega_{frac}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\omega_{frac}\right) + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Die graphische Darstellung zeigt, dass der Äquatorradius besonders schnell ansteigt, wenn sich die Winkelgeschwindigkeit dem kritischen Wert (Zerreißen des Sterns) nähert.



Grenzfälle:

Für $\omega_{frac} = 0$ (keine Rotation) liefert die Regel von de L'Hospital (s. Anhang): $R_{eq} = 1$, also den Polradius.

Für $\omega_{frac} = 1$ (maximale Rotation) erhalten wir

$$R_{eq} = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos(-1) + \frac{4\pi}{3}\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \pi + \frac{4}{3} \cdot \pi\right)$$
$$= 3 \cdot \cos\left(\frac{5}{3} \cdot \pi\right) = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$$

Der Äquatorradius ist 1,5-mal so groß wie der Polradius, was wir bereits schon weiter oben hergeleitet hatten.

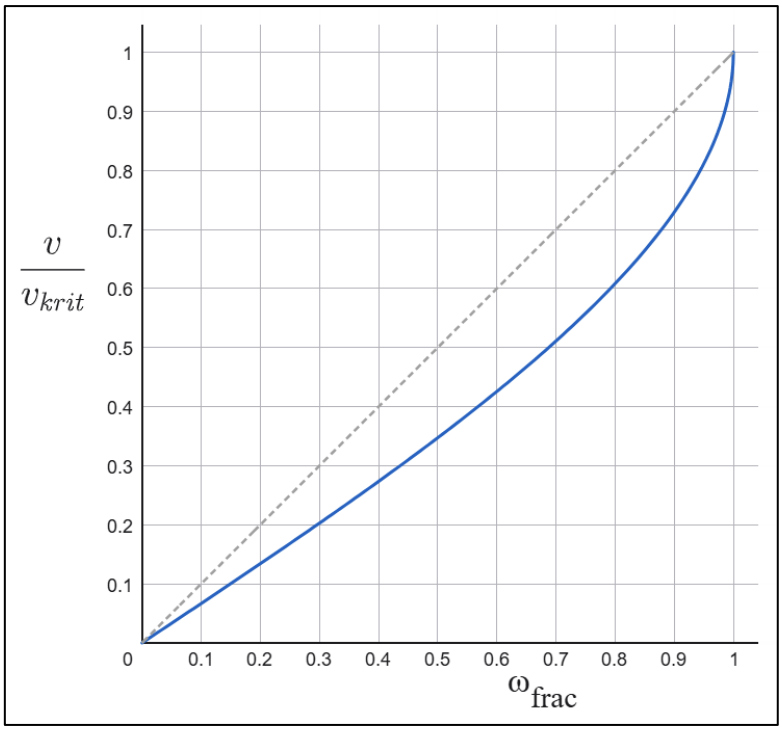
Der Zusammenhang zwischen dem **Geschwindigkeitsverhältnis** $\frac{v}{v_{krit}}$ und der normierten Winkelgeschwindigkeit $\omega_{frac} = \frac{\omega}{\omega_{krit}}$:

Für die Rotationsgeschwindigkeit des Sterns am Äquator gilt $v = \omega \cdot R_{eq}$.

Für die kritische Rotationsgeschwindigkeit des Sterns am Äquator gilt $v_{krit} = \omega_{krit} \cdot R_{krit}$ mit $R_{krit} = 1,5$. Das Verhältnis der Geschwindigkeiten ist $\frac{v}{v_{krit}} = \frac{\omega \cdot R_{eq}}{\omega_{krit} \cdot 1,5} = \frac{2}{3}\omega_{frac} \cdot R_{eq}$ und mit der Formel für den Äquatorradius ergibt das:

$$\frac{v}{v_{krit}} = \frac{2}{\omega_{frac}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\omega_{frac}\right) + \frac{4\pi}{3}\right).$$

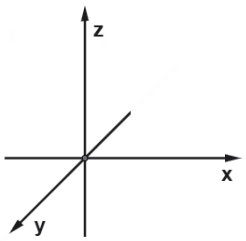
Das Diagramm zeigt den funktionalen Zusammenhang anschaulich.



Das effektive Potential in kartesischen Koordinaten

Der Gradient des Potentials Φ_{eff} ergibt die Gravitationsbeschleunigung in vektorieller Form $\vec{g}_{eff} = \nabla\Phi_{eff}$. Für die Berechnung und Verwendung des Gradienten ist es günstiger, das Potential in **kartesische Koordinaten** zu überführen. Die Transformation von Kugelkoordinaten zu kartesischen Koordinaten erfolgt über

$$x = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi)$$
$$z = r \cdot \cos(\vartheta)$$



mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Aus $z = r \cdot \cos(\vartheta)$ erhalten wir $\cos(\vartheta) = \frac{z}{r}$ und mit

$\sin^2(\vartheta) = 1 - \cos^2(\vartheta) = 1 - \frac{z^2}{r^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^2}$ schließlich $\sin^2(\vartheta) = \frac{r^2 - z^2}{r^2}$

Einsetzen von r und $\sin^2(\vartheta)$ in die Potentialformel

$$\Phi_{eff} = -\frac{G \cdot M}{R_{Pol}} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{4}{27} \cdot \omega_{frac}^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2(\vartheta) \right)$$

ergibt

$$\Phi_{eff} = -\frac{G \cdot M}{R_{Pol}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{4}{27} \cdot \omega_{frac}^2 \cdot r^2 \cdot \frac{r^2 - z^2}{r^2} \right)$$
$$= -\frac{G \cdot M}{R_{Pol}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{4}{27} \cdot \omega_{frac}^2 \cdot (x^2 + y^2) \right)$$

Das effektive Potential in kartesischen Koordinaten:

$$\Phi_{eff} = -\frac{G \cdot M}{R_{Pol}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{4}{27} \cdot \omega_{frac}^2 \cdot (x^2 + y^2) \right)$$

Der Umriss des Sterns

Wir wollen den Umriss der Sternenoberfläche berechnen, wenn wir von der Seite auf den Äquator des Sterns schauen (edge-on). Diese Sichtweise ist erfüllt, wenn die y-Koordinate Null ist. Wir zeichnen also die x-Achse nach rechts und die z-Achse nach oben. Mit y = 0 und dem Potential der Pole auf der Oberfläche erhalten wir

$$-\frac{G\cdot M}{R_{Pol}} = -\frac{G\cdot M}{R_{Pol}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot x^2 = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot x^2\right)^2} = x^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot x^2\right)^2} - x^2}$$

$$z(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{4}{27}\cdot\omega_{frac}^2\cdot x^2\right)^2} - x^2}$$

Die Funktion z(x) beschreibt den Umriss des Sterns beim direkten Blick auf dessen Äquatorkante. Mit einer Graphiksoftware wie z.B. GeoGebra lässt sich die Funktion z(x) anschaulich darstellen (s. nächste Seite).

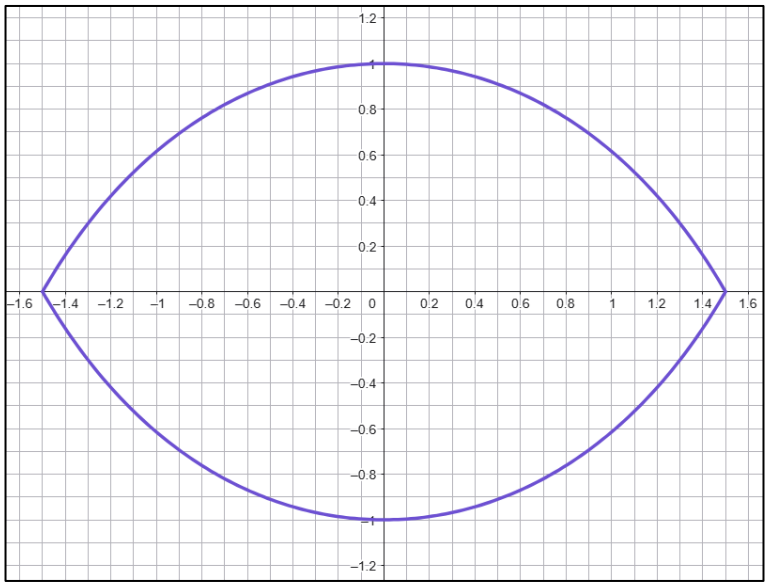
Das Roche-Modell geht davon aus, dass sich der Polradius des Sterns bei zunehmender Rotation nicht ändert, weil dort keine Zentrifugalkräfte wirken. Da aber der Äquatorradius wächst, vergrößert sich das **Volumen des Sterns**. Wenn die Rotation den kritischen Wert erreicht ($\omega_{frac}=1$), ist das Volumen 1,826-mal so groß wie ohne Rotation – eine Zunahme um 82,6 %. Neuere und komplexere Sternmodelle gehen übrigens davon aus, dass sich der Polradius aufgrund der Rotation doch leicht verändern kann – allerdings nur um wenige Prozent.

Einige **Beispiele:** Der Polradius wurde stets auf 1 normiert und das Volumen bezieht sich auf das Volumen des nicht rotierenden Sterns.

- $\omega_{frac} = 1$ (kritische Rotation)

  R_{eq} = 1,5

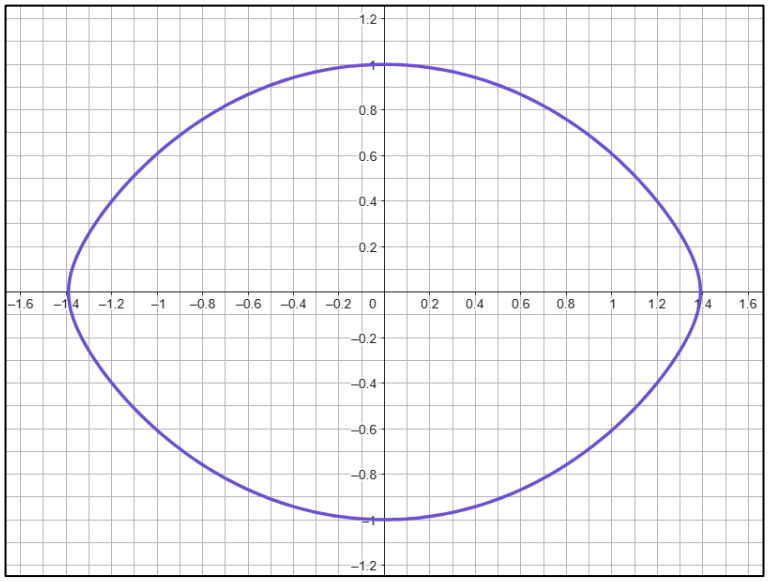
  Volumen = 1,826



- $\omega_{frac} = 0,99$

  R_{eq} = 1,3897

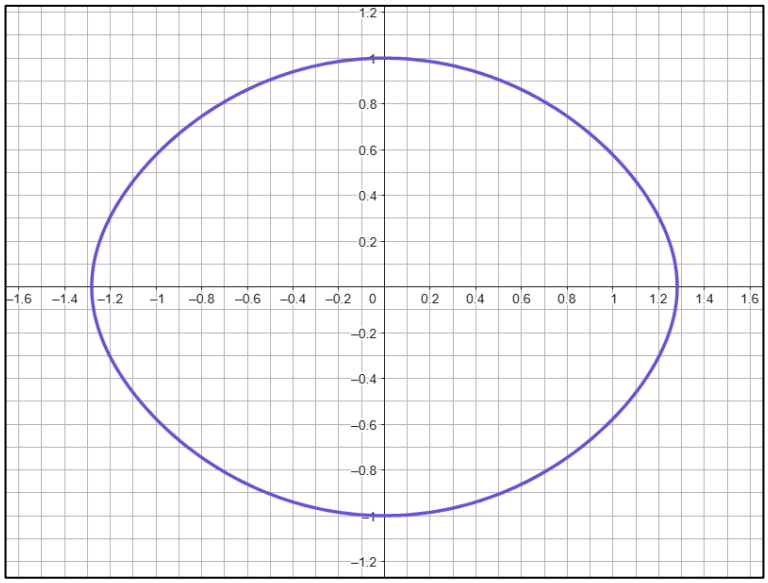
  Volumen = 1,733



$\omega_{frac} = 0,95$

R_{eq} = 1,281

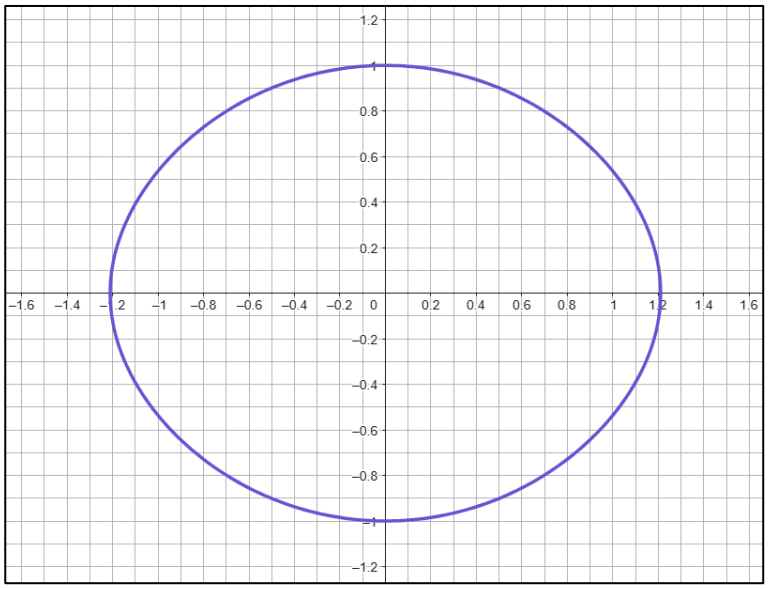
Volumen = 1,558



$\omega_{frac} = 0,90$

R_{eq} = 1,2155

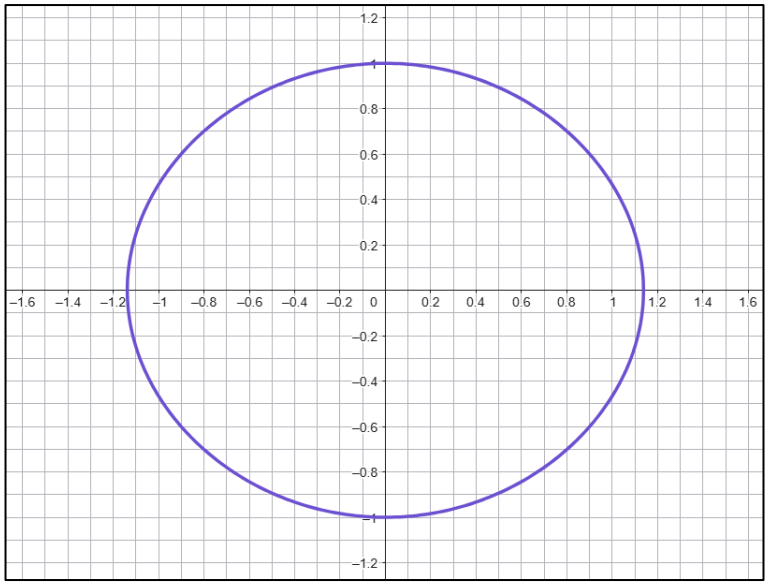
Volumen = 1,435



$\omega_{frac} = 0,8$

R_{eq} = 1,1407

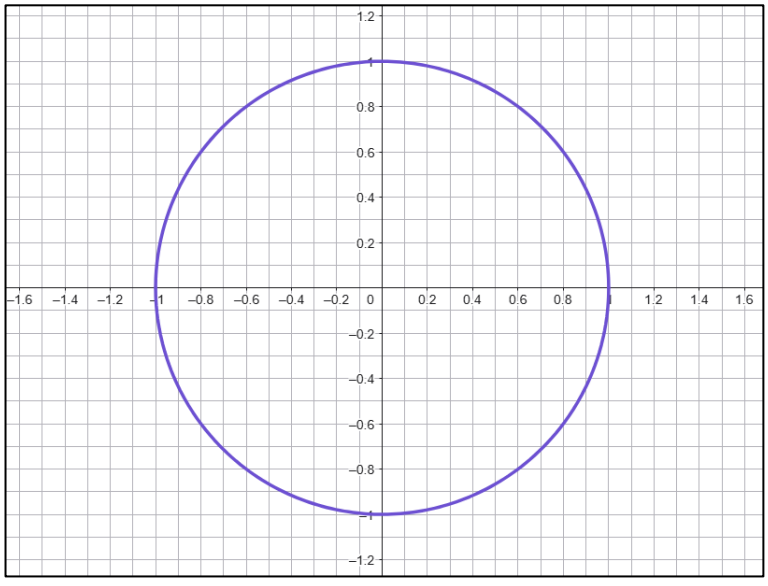
Volumen = 1,285



$\omega_{frac} = 0$ (keine Rotation)

R_{eq} = 1,000

Volumen = 1,000



Die Rand- und Gravitationsverdunkelung

Außer der Randverdunkelung weisen schnell rotierende Sterne eine starke Gravitationsverdunkelung auf. Je weiter die Sternoberfläche von der Rotationsachse entfernt ist, desto geringer ist dort die Temperatur und desto dunkler erscheint die Oberfläche. Das führt dazu, dass im Äquatorbereich des Sterns die Verdunkelung aufgrund der geringeren Schwerkraft und der starken Zentrifugalkräfte mitunter extrem ausfallen kann.

Die Temperatur auf der Oberfläche des Sterns ist mit der effektiven Gravitationsbeschleunigung **g_{eff}** verknüpft. Es gilt $T_{eff} \sim g_{eff}^{\beta}$, wobei der Exponent β normalerweise mit dem Wert $\beta = 0{,}25$ angesetzt wird. Bei schnell rotierenden Sternen gilt aber eher $\beta = 0{,}2$ (zuweilen auch darunter). Aufgrund des Stefan-Boltzmann Gesetzes ist die Leuchtkraft eines Sterns zur vierten Potenz der Temperatur proportional, also $L \sim T_{eff}^4$ und mit $\beta = 0{,}2$ dann $L \sim \left(g_{eff}^{0,2}\right)^4$, also $L \sim \left(g_{eff}\right)^{0,8}$. Das bedeutet: Kennen wir die effektive Gravitationsbeschleunigung an jedem Punkt der Sternenoberfläche, können wir dort einen Helligkeitswert zuordnen.

Der Gradient des Potentials

Der Gradient des Potentials Φ_{eff} ergibt die Gravitationsbeschleunigung in vektorieller Form. Wir hatten das Potential in kartesischen Koordinaten formuliert:

$$\Phi_{eff} = -\frac{G \cdot M}{R_{Pol}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{4}{27} \cdot \omega_{frac}^2 \cdot \left(x^2 + y^2\right) \right)$$

Zur Vereinfachung setzen wir den Vorfaktor auf Eins, also $\frac{G \cdot M}{R_{Pol}} = 1$ und erhalten

$$\Phi_{eff} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{4}{27} \cdot \omega_{frac}^2 \cdot \left(x^2 + y^2\right)$$

Die partiellen Ableitungen ergeben die Komponenten des Vektors $\vec{g}_{eff}$ (s. Anhang):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = x \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{8}{27} \cdot \omega_{frac}^2 \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = y \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{8}{27} \cdot \omega_{frac}^2 \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = z \cdot \frac{1}{r^3}$$

Der Betrag dieses Vektors ist $g_{eff} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}$.

Mit $L \sim \left(g_{eff}\right)^{0,8}$ lässt sich so für jeden Punkt der Sternenoberfläche die Helligkeit und damit die Gravitationsverdunkelung berechnen.

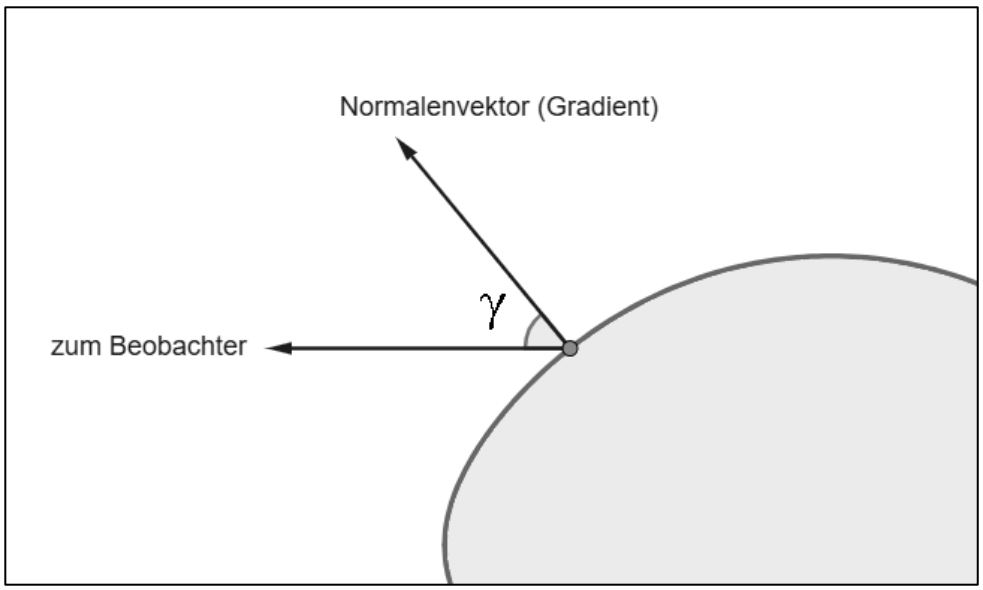
Bei der kritischen Rotation, also bei $\omega_{frac} = 1$ nimmt das effektive Potential am Äquator (z = 0 und y = 0) übrigens den Wert Null an, denn es gilt dort für den Radius r = 1,5 und für die x-Komponente des Gradienten erhält man:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 1,5 \cdot \left(\frac{1}{(1,5)^3} - \frac{8}{27}\right) = 1,5 \cdot \left(\frac{8}{27} - \frac{8}{27}\right) = 0 .$$

Dies bedeutet maximale Gravitationsverdunkelung am Äquator.

Der Gradient ist ein Vektor, der orthogonal zur Oberfläche des Sterns orientiert ist. Damit eignet sich dieser Vektor auch, um die **Randverdunkelung** des Sterns zu berechnen. Diese ergibt sich mithilfe des Winkels zwischen Normalenvektor (Gradient) und der Sichtlinie zum Beobachter. Das quadratische Gesetz für die Randverdunkelung lautet: $\frac{I(\gamma)}{I_0} = 1 - u_1 \cdot \left(1 - \cos(\gamma)\right) - u_2 \cdot \left(1 - \cos(\gamma)\right)^2$, wobei die Koeffizienten u1 und u2 für schnell rotierende Sterne wie Be-Sterne im Bereich von 0,2 bis 0,3 liegen. Der Winkel γ beschreibt den Winkel zwischen Normalenvektor und Sichtlinie. Da die Sichtlinie in y-Richtung zeigt, berechnet sich der Winkel γ durch:

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}{g_{eff} \cdot y} = \frac{g_y \cdot y}{g_{eff} \cdot y} = \frac{g_y}{g_{eff}}$$



Die Computersimulation

Das Programm „Rotation von Sternen.exe“ (https://mabo-physik.de/sterne-rotation) wurde vom Verfasser in der Programmiersprache Delphi erstellt und ermöglicht die graphische Darstellung der Oberfläche schnell rotierender Sterne. Die Simulation wurde dabei wie folgt angelegt:

- Berechnung aller Punkte (kartesische Koordinaten) der Sternenoberfläche durch schrittweises Durchlaufen (Schleifen) der Winkelwerte von teta und phi in der Radiusformel

$$r = \frac{3}{\omega_{frac} \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\omega_{frac} \cdot \sin(\vartheta)\right) + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)$$

  und Erzeugung kartesischer Koordinaten mit

$$x = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi)$$
$$z = r \cdot \cos(\vartheta)$$

- Berechnung der Gradientenwerte (Normalenvektor)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = x \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{8}{27} \cdot \omega_{frac}^2\right)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = y \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{8}{27} \cdot \omega_{frac}^2\right)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = z \cdot \frac{1}{r^3}$$

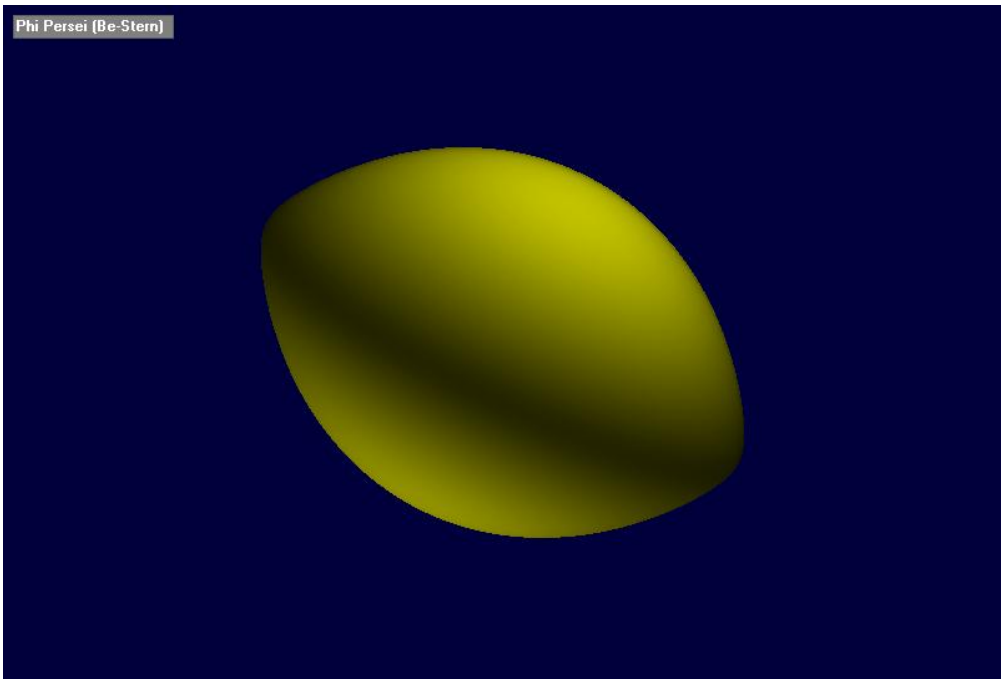
- Drehungen der xyz-Punkte und der Koordinaten der Normalenvektoren um die x-Achse (Inklination) und die y-Achse (Positionswinkel am Himmel) mithilfe von Drehmatrizen. Berechnung der Randverdunkelung und Gravitationsverdunkelung für jeden gedrehten xyz-Punkt der Sternenoberfläche.

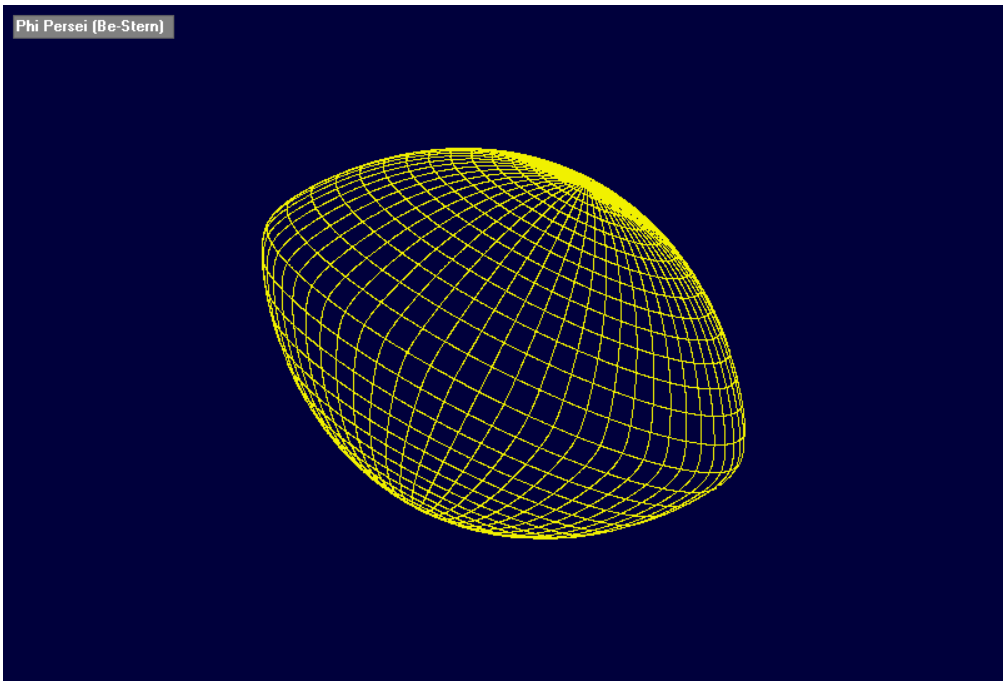
- Plotten der x- und z-Koordinaten des gedrehten Körpers mit gewichteten Helligkeitswerten (Rand- und Gravitationsverdunkelung), wobei nur die Punkte abgebildet werden, deren Normalenvektor in Richtung des Betrachters (y-Achse) zeigen.

Beispiel: Der Stern Phi Persei

Entfernung: 720 Lichtjahre, Be-Stern
$\omega_{frac} = 0,997$, Inklination 78°, Positionswinkel am Himmel 27°,
Rotationsgeschwindigkeit am Äquator 450 km/s, kritische Geschwindigkeit 471 km/s,
Polradius 5,5 R_{Sonne}, Äquatorradius 7,9 R_{Sonne}, Masse: 9,6 M_{Sonne}

Ergebnisse der Computersimulation





Anhang

Zur Regel von de L'Hospital

Der Äquatorradius des Sterns ergibt sich, wenn wir $\vartheta = 90°$ (bzw. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$) setzen:

$$R_{eq} = \frac{3}{\omega_{frac}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\omega_{frac}\right) + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Für $\omega_{frac} = 0$ (keine Rotation) liefert die Regel von de L'Hospital (s. Anhang): $R_{eq} = 1$, also den Polarradius.

<u>Begründung:</u>

Einsetzen von $\omega_{frac} = 0$ liefert den Bruch

$$\frac{3 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos(0) + \frac{4\pi}{3}\right)}{0} = \frac{3 \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)}{0} = \frac{0}{0}$$

Die Funktion $R_{eq}(\omega_f)$ ist differenzierbar. Daher gilt die Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die Ableitung von $R_{eq}(\omega_f)$ lautet:

$$R'_{eq}(\omega_f) = -\frac{1}{\sqrt{1-\omega_f^2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(-\omega_f\right) + \frac{4}{3}\pi\right) \quad \text{und} \quad R'_{eq}(0) = 1$$

$$\lim_{\omega_f \to 0} \frac{R_{eq}(\omega_f)}{\omega_f} = \lim_{\omega_f \to 0} \frac{R'_{eq}(\omega_f)}{1} = \frac{R'_{eq}(0)}{1} = 1$$

Die partiellen Ableitungen des Potentials

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{4}{27}\cdot\omega_{\text{frac}}^2\cdot\left(x^2+y^2\right)$$
$$= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{27}\cdot\omega_{\text{frac}}^2\cdot\left(x^2+y^2\right)$$

Die partiellen Ableitungen ergeben die Komponenten des Vektors $\vec{g}_{\text{eff}}$.

Mithilfe der Kettenregel ergibt sich für die Ableitung nach x:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{4}{27}\omega_f^2\cdot 2x$$
$$= x\cdot r^{-3} - \frac{8}{27}\omega_f^2\cdot x = x\cdot\left(\frac{1}{r^3} - \frac{8}{27}\omega_f^2\right)$$

Entsprechend ergibt sich für die drei Vektorkoordinaten des Gradienten

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = x\cdot\left(\frac{1}{r^3} - \frac{8}{27}\cdot\omega_{\text{frac}}^2\right)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = y\cdot\left(\frac{1}{r^3} - \frac{8}{27}\cdot\omega_{\text{frac}}^2\right)$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = z\cdot\frac{1}{r^3}$$

Anmerkung:
Dieses Skript und auch die Computersimulation wurden **ohne** KI-Unterstützung erstellt.
